## CAPÍTULO I

# MATEMÁTICAS

# 1. CONJUNTOS

En el lenguaje común, *conjunto* es, hasta cierto punto, sinónimo de *colección, clase* o *grupo*.

Sin embargo, en el desarrollo de este estudio, veremos que la noción matemática de conjunto es más amplia. Se puede hablar, en matemáticas, de *conjunto unitario, conjunto vacío, conjunto finito*.

Consideramos que el concepto de conjunto es primitivo; por eso, lo aceptamos sin definirlo. Pero vamos a ilustrar la idea con algunos ejemplos.

Designaremos a los conjuntos con letras mayúsculas *(A, B, C,* etcétera) y el conjunto vacío con la letra escandinava *Ø*.

Los objetos que pertenecen al conjunto se denominan *elementos del conjunto*. Los elementos se indican con nombres, figuras o símbolos (en este caso, es preferible usar letras latinas minúsculas: *a, b, c,* etcétera).

En los conjuntos numéricos, los números bien determinados se indican con numerales (la representación usual en la aritmética) y los genéricos con letras minúsculas.

Solo nos interesan los conjuntos bien determinados; es decir, aquellos para los cuales podemos decidir si un objeto dado pertenece o no al conjunto.

Cuando dos conjuntos $A$ y $B$ poseen exactamente los mismos elementos, decimos que $A$ es igual a $B$, o que son lo mismo. Representamos esa identidad del siguiente modo:

$$A = B$$

Ejemplo:

Los conjuntos $\{a, b, c\}$ y $\{c, a, b\}$ son iguales; es decir, uno es el otro.

Para determinar un conjunto, generalmente usamos uno de los dos procesos siguientes:

1) Representamos los elementos uno después de otro, entre llaves. Decimos entonces que hemos realizado la enumeración, diferenciación o lista de los elementos.

Ejemplo:

$A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{\textit{lápiz, cuaderno, lapicero}\}$

$C = \{2, 4, 6, 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

*Nota:* este proceso se usa principalmente con los conjuntos finitos (aquellos que tienen un número determinado de elementos); pero cuando el conjunto es infinito, por lo general se escriben los primeros números del conjunto para que quede clara la ley que determina a los demás, como en el ejemplo $C$. Los puntos suspensivos (…) deben leerse *así sucesivamente*.



2) Cuando todos los elementos del conjunto y solamente esos elementos cumplen un criterio de pertenencia, ese criterio se denomina *propiedad característica del conjunto*. Por ejemplo, si se denomina $x$ al elemento genérico del conjunto $A$, y $p$ a la propiedad característica del conjunto, escribimos lo siguiente:

$$A = \{x \,/\, p(x) \text{ es conforme}\}$$

o simplemente

$$A = \{x \,/\, p(x)\}$$

Esto se lee así: "$A$ es el conjunto de los elementos $x$ tal que para cada $x$ se cumple la propiedad $p(x)$".

Ejemplo:

$$A = \{x \,/\, x \text{ es vocal del alfabeto castellano}\} = \{a, e, i, o, u\}$$

donde $x$ es el elemento genérico de $A$ o la variable del conjunto $A$ y la propiedad característica es $p$; es decir, "cada elemento es vocal del alfabeto latino".

$$B = \{x \,/\, x \in N^* \text{ y } x \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Nota: N* es el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3\ldots\}$
El signo $\leq$ se lee "menor o igual".

Escribimos $a \in A$ para indicar que el elemento $a$ pertenece al conjunto $A$; y $a \notin A$ cuando $a$ no pertenece al conjunto $A$; en caso contrario, usaremos las expresiones "$A$ posee a $a$" y "$A$ no posee a $a$".

En general, se puede escribir el mismo conjunto de las dos formas o se puede pasar de una forma a la otra.

Ejemplo:

$$A = \{x / x \in N^* \text{ y } x < 4\} = \{1, 2, 3\}$$

Asimismo, un conjunto puede ser considerado elemento de otro conjunto.

Ejemplo:

$$A = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$$

Los elementos de $A$ son los conjuntos $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ y $\{5\}$.

*Nota:* los siguientes ejemplos ilustran los conceptos de conjunto vacío y conjunto unitario:

$$A = \{x / x \in N^* \text{ y } 2 < x < 3\} = \varnothing$$
$$B = \{x / x \in N^* \text{ y } 2 < x \leq 3\} = \{3\}$$

Por consiguiente, un conjunto es vacío cuando la propiedad característica $p$ no es verdadera para ningún valor de la variable $x$, y es unitario cuando $p$ es verdadera para uno y solo un valor de $x$.

## 1.1 Subconjuntos

Dados dos conjuntos $A$ y $B$, si cada elemento del conjunto $A$ es elemento del conjunto $B$, decimos que $A$ es un subconjunto de $B$. Representamos esta relación de la siguiente manera:

$$A \subset B$$
*o*
$$B \supset A$$



que se lee *"A es subconjunto de B"*, *"A está incluido (o contenido) en B"* o *"B incluye (o contiene a) A"*.

Decimos también que un conjunto es subconjunto de sí mismo; o sea

$$A \subset A$$
*o*
$$A \supset A$$

El conjunto vacío también se considera subconjunto de cualquier conjunto.

## 1.2 Intersección de conjuntos

Dados dos conjuntos $A$ y $B$, se llama *intersección de A y B* al conjunto $C$, constituido por todos los elementos que pertenecen al conjunto $A$ y al conjunto $B$; es decir, los que son comunes a ambos.

La intersección se escribe del siguiente modo:

$$C = A \cap B$$

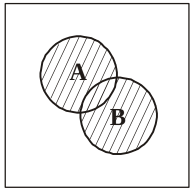
que se lee *"C es A intersectado con B"* o *"C es la intersección de A y B"*.

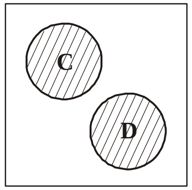
Por ejemplo:

1) $\left.\begin{array}{l} A = \{1, 3, 4, 6\} \\ B = \{1, 2, 3, 5\} \end{array}\right\} \longrightarrow A \cap B = \{1, 3\}$

2) $\left.\begin{array}{l} C = \{1, 3, 5, 7 \ldots\} \\ D = \{2, 4, 6 \ldots\} \end{array}\right\} \longrightarrow C \cap D = \varnothing$

Podemos representar los conjuntos con figuras que reciben el nombre de *diagramas de Venn*. Cuando en un estudio aparece un conjunto $U$ que contiene a todos los demás, entonces lo llamamos *conjunto universo* o *soporte*, y lo representamos en el diagrama con un rectángulo. Los siguientes diagramas corresponden a los ejemplos 1 y 2.




$A \cap B = \{1, 3\}$ $\qquad$ $C \cap D = \varnothing$

## 1.3 Reunión de conjuntos

Se llama *reunión* o *unión* de dos conjuntos $A$ y $B$ al conjunto $C$, formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto $A$ o al conjunto $B$.

Esto se escribe así:

$$C = A \, U \, B$$

Esto se lee *"$C$* es *$A$ unión (o reunión) $B$"* o *"$C$* es *$A$ unido con $B$"* o *"$C$* es igual a *$A$ unión $B$"*.

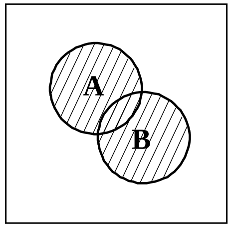


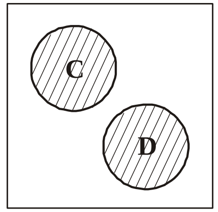
Ejemplo:

1) $\left.\begin{array}{l} A = \{1, 3, 7, 8\} \\ B = \{1, 2, 7\} \end{array}\right\} \longrightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$

2) $\left.\begin{array}{l} C = \{1, 3, 5, 7\ldots\} \\ D = \{2, 4, 6, 8\ldots\} \end{array}\right\} \longrightarrow C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5\ldots\}$

En los diagramas de Venn, el conjunto *reunión* está formado por la parte **sombreada.**




$A \cup B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ $\qquad$ $C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5\ldots\}$

## 1.4 Diferencia de conjuntos

Se llama *diferencia* entre dos conjuntos $A$ y $B$, en ese orden, al conjunto $D$, formado por elementos de $A$ que no pertenecen al conjunto $B$.

Esto se escribe así:

$$D = A - B$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{1, 2, 5, 7, 8\} \\ B = \{1, 5, 6, 9\} \end{array}\right\} \quad A - B = \{2, 7\ \ 8\}$$

Principalmente cuando $B$ es subconjunto de $A$, la diferencia $A - B$ se llama *conjunto complementario* de $B$ en relación con $A$, y esto se escribe así:

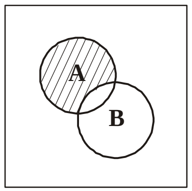
$$D = A - B = C_A^B$$

y se lee "complemento de $B$ en relación con $A$".

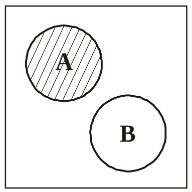
Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{2, 3, 4, 6, 8\} \\ B = \{3, 4, 8\} \end{array}\right\} \longrightarrow C_A^B = \{2, 6\}$$

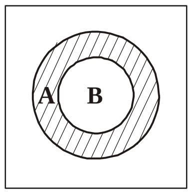
En los diagramas de Venn, las siguientes diferencias se representan mediante las partes sombreadas.




$A - B \subset A$




$A - B = A$




$C_A^B = A - B \subset A$

Ejercicios:

1) Forme todos los subconjuntos de los conjuntos dados:

a) $\{a, b\}$ b) $\varnothing$ c) $\{1, 2, 3\}$



2) Dados los siguientes conjuntos, efectúe las operaciones que se le indican:

$A = \{a, b, c\}$; $B = \{c, e, f, g\}$; $C = \{c, f\}$; $D = \{m, n\}$

| | | |
|---|---|---|
| a) $A \cup B$ | b) $A \cup D$ | c) $A \cup \varnothing$ |
| d) $D \cup D$ | e) $A \cap B$ | f) $A \cap D$ |
| g) $D \cap D$ | h) $C \cap C$ | i) $A - B$ |
| j) $C_B^C$ | k) $C_B^{\varnothing}$ | l) $C_D^D$ |

3) Escriba los siguientes conjuntos en forma de lista:

a) $\{x \,/\, x \in N \text{ y } (2 < x < 8)\}$

b) $\{z \,/\, z \in N \text{ y } (3 < z < 10) \text{ y } (6 < z < 13)\}$

Siendo que $N = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots\ldots\}$

4) Escriba V si es verdadero y F si es falso.

a) $2 \in \{1, 2, 3\}$ ( )

b) $12 \in \{1, 2, 3\}$ ( )

c) $\varnothing = \{0\}$ ( )

d) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$ ( )

e) $\{a, b\} \subset \{a, c\}$ ( )

f) $\{a, b, c\} \supset \{b, c, a\}$ ( )

g) $\varnothing \subset \{a, b, c\}$ ( )

h) $b \subset \{b, c\}$ ( )

i) $\{i, j\} \in \{g, h, i, j\}$ ( )

# 2. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES (N*)

Los números naturales se utilizan para responder a la pregunta "¿Cuántos?" Los hombres primitivos desarrollaron el concepto de número gracias a la práctica de asociar los objetos o elementos de un conjunto con los elementos de otro. Por ejemplo, cuando por la mañana las ovejas salían del establo, ellos ponían una piedra en una pila por cada cabeza de ganado. Por la tarde, cuando las ovejas regresaban, sacaban una piedra de la pila por cada oveja que entraba en el redil. Si no sobraba ninguna piedra en la pila cuando la última oveja había entrado en el establo, ellos sabían que el ganado estaba completo. Ellos estaban tratando de resolver la pregunta "¿Cuántos?" haciendo una correspondencia biunívoca entre las piedras de la pila y las ovejas del rebaño. Por *correspondencia biunívoca* entendemos que cada piedra corresponde exactamente a una oveja y que cada oveja corresponde exactamente a una piedra, lo cual significa que el número de ovejas es el mismo que el de piedras.

Afortunadamente, contamos con un conjunto modelo que nos puede ayudar a saber "cuántos" existen en cada conjunto. Este conjunto puede usarse también para confirmar que existe "exactamente tantos" en un conjunto en relación con otro.

Este conjunto modelo es el conjunto de los números naturales, representado por los numerales *1, 2, 3, 4, 5…* Simbolizamos este conjunto con la letra mayúscula ene con asterisco (N*).



Estos números se utilizan para contar objetos de una colección y por eso también se llaman *números de conteo*. Vamos a suponer que nuestro primer número natural sea *1*. Si queremos hablar sobre todos los números naturales incluyendo al cero, llamaremos al conjunto *conjunto de números enteros,* y lo representaremos mediante la letra *N*.

## 2.1 Números primos

Número primo es aquel que solo es divisible por sí mismo y por la unidad. Así, son primos los números del conjunto *P,* o sea

$$P = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\ldots\}$$

que forman una sucesión infinita de números.

Observe que *2* es el único número par que es primo. Cualquier otro número par sería divisible por lo menos por *2*.

Los números que no son primos se llaman *números múltiplos* o *compuestos*.

Se debe prestar atención en distinguir cuándo un número es primo y cuándo múltiplo. A continuación veremos cómo se reconocen los números primos.

## 2.2 Reconocimiento de los números primos

Los números primos pueden ser reconocidos mediante un proceso práctico que se basa en el hecho de que

*Todo número múltiplo tiene por lo menos un divisor primo.*

Por ejemplo:

*20* es múltiplo y es divisible por *2* y *5*.
*30* es múltiplo y es divisible por *2*, *3* y *5*.

El reconocimiento se basa en la siguiente regla práctica:

*Se divide el número dado por los números de la sucesión de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13… y se obtiene un cociente y una diferencia. Si la diferencia es distinta de cero, se prueba otra división hasta que el cociente sea menor o igual al divisor, y entonces podemos afirmar que el número es primo.*

Ejemplos:

1) Verificar, mediante la regla, si el número *47* es primo o múltiplo.

$$\begin{array}{r|l} 47 & \underline{\;3\quad\;} \\ 17 & 15 \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 47 & \underline{\;5\quad\;} \\ 2 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 47 & \underline{\;7\quad\;} \\ 5 & 6 \end{array}$$

Obtenemos inmediatamente el cociente *6* y el divisor *7*; es decir, el cociente es menor que el divisor.

Afirmamos, entonces, que el número *47* es primo.

En efecto, si no lo fuera, aceptaría un divisor primo mayor que *7* y el cociente sería menor que *6*. Y como ya hemos visto, no acepta divisores menores que *6*. Si aceptara un divisor menor que *6*, este ya hubiera aparecido en las divisiones anteriores.



2) Como *89* no es divisible por *2, 3, 5, 7* y *11*, empezaremos a dividir por *13*.

$$\begin{array}{r|l} 89 & \underline{\;13\quad\;} \\ 11 & 6 \end{array}$$

Y ya obtuvimos un cociente menor que el divisor.

Luego, *89* es primo.

3) Verificar si *289* es primo.

*289* no es divisible por *2, 3, 5, 7, 11*. Veamos si es divisible por *13, 17, 19…*

$$\begin{array}{r|l} 289 & \underline{\;13\quad\;} \\ 29 & 22 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 289 & \underline{\;17\quad\;} \\ 119 & 17 \\ 00 & \end{array}$$

Como la diferencia es cero, *289* es múltiplo de *17*.

## 2.3 Descomposición de un número en factores primos

Hemos visto que todo número múltiplo puede ser descompuesto en un producto de dos o más factores primos.

Para realizar esta descomposición, basta dividir primero el número dado por el menor número primo que sea su divisor y proceder de la misma manera con el cociente obtenido, y así sucesivamente hasta obtener un cociente primo.

Ejemplo:

1) Descomponer el número *30* en sus factores primos.

$$\begin{array}{llll} 30 & \underline{\vert\ 2} & & \\ 10 & 15 & \underline{\vert\ 3} & \\ 0 & 0 & 5 & \underline{\vert\ 5} \\ & & 0 & 1 \end{array}$$

En la práctica, esto se realiza siguiendo el siguiente esquema:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Se traza una línea vertical al lado derecho del número *30*. Los factores primos se colocan a la derecha de la línea vertical y los cocientes sucesivos de las divisiones efectuadas se colocan a la izquierda.

Por lo tanto: $30 = 2 \times 3 \times 5$

2) Descomponer el número *72* en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$



Ejercicios:

1) Verificar si los siguientes números son números primos:
a) *289* b) *731* c) *1.111* d) *521*

2) Descomponer los siguientes números en factores primos:
a) *160* b) *250* c) *289* d) *243*
e) *1.024* f) *1.728*

## 2.4 Máximo común divisor (MCD)

Dados los números *12, 18 y 30,* y los conjuntos de sus divisores:

$$D\,(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$
$$D\,(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$
$$D\,(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

Los conjuntos *D(12), D(18)* y *D(30)* son finitos y ordenados.

Consideremos ahora el conjunto de los divisores comunes; es decir, el conjunto intersección de *D(12), D(18)* y *D(30)*:

$$D\,(12) \cap D(18) \cap D(30) = \{1, 2, 3, 6\}$$

que también es finito y ordenado.

Todo conjunto finito y ordenado posee un máximo; es decir, un valor mayor que todos los demás. En este caso, es el número *6*. El valor máximo de este conjunto intersección se llama *máximo común divisor* de los números dados (*12, 18, 30*).

Se escribe: $MCD\ (12,\ 18,\ 30) = 6$

De manera general, indicaremos:

$$MCD\ (a,\ b,\ c) = D$$

## 2.5 Cálculo del MCD de varios números

### *Método de las divisiones sucesivas*

**Primer caso.** Cuando el número mayor es divisible por el menor.

Por ejemplo, para calcular el MCD entre *30* y *6* tenemos que como *6* divide a *30* y es exacto, entonces *6* es el divisor común mayor. Esto se puede escribir de la siguiente manera:

$$MCD\ (6,\ 30) = 6$$

y, entonces, se puede concluir lo siguiente:

> *Si el número mayor es divisible por el número menor, entonces este último es el MCD de ambos.*

**Segundo caso.** Cuando el número mayor no es divisible por el número menor.

Por ejemplo, para calcular el MCD (*45, 36*), se procede de la siguiente forma: $45 = 1 \times 36 + 9$ y, de esta manera, todo divisor común de *36* y de *9* será también divisor de *45*. Podemos identificar ahora el MCD (*36, 9*), que —siguiendo el primer caso— es *9*. Luego:

$$MCD\ (45,\ 36) = 9$$



En la práctica se realiza:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | *1* | *4* | *cociente* |
| *45* | *36* | *9* | *divisores* |
| *9* | *00* | | *diferencias* |

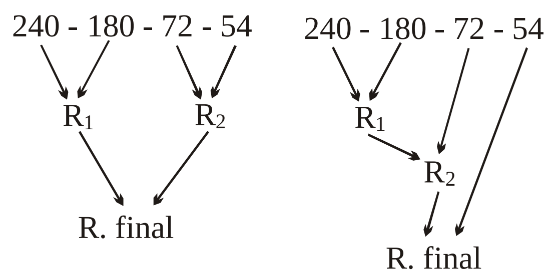
Esto significa que cuando la diferencia es cero, el último divisor (*9*) es el MCD.

Se deduce entonces la regla siguiente:

> *Para encontrar el MCD de dos números se divide el número mayor por el menor; luego se divide el número menor por la diferencia de la división entre el número mayor y el menor; inmediatamente se divide la primera diferencia por la segunda y así sucesivamente; cuando se obtiene una diferencia cero, el último divisor es el MCD.*

## 2.6 Máximo común divisor de más de dos números

Calcular el MCD (*240, 180, 72, 54*). En este caso, basta usar cualquiera de los esquemas siguientes, en los que llamamos *R1* y *R2* a los resultados parciales y *R* al resultado final.



| | | |
|---|---|---|
| | *1* | *3* |
| *240* | *180* | *60* |
| *060* | *00* | |

$R_1 = 60$

| | | |
|---|---|---|
| | *1* | *3* |
| *72* | *54* | *18* |
| *18* | *00* | |

$R_2 = 18$

| | | |
|---|---|---|
| | *3* | *3* |
| *60* | *18* | *6* |
| *6* | *00* | |

$R = 6$

$MCD\ (240,\ 180,\ 72,\ 54) = 6$

| | | |
|---|---|---|
| | *1* | *3* |
| *240* | *180* | *60* |
| *060* | *00* | |

$R_1 = 60$

| | | |
|---|---|---|
| | *1* | *5* |
| *72* | *60* | *12* |
| *12* | *00* | |

$R_2 = 12$

| | | |
|---|---|---|
| | *4* | *2* |
| *54* | *12* | *6* |
| *6* | *00* | |

$R = 6$

$MCD\ (240,\ 180,\ 72,\ 54) = 6$

## 2.7 Números primos entre sí

Buscamos el MCD entre *25* y *36*.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *1* | *2* | *3* | *1* | *2* |
| *36* | *25* | *11* | *3* | *2* | *1* |
| *11* | *3* | *2* | *1* | *0* | |

Notamos que el MCD es *1*. Cuando esto ocurre, decimos que los números son primos entre sí.

Se puede decir también que los números primos entre sí son aquellos cuyo único divisor común es la unidad.



Ejercicios:

1) Calcule el máximo común divisor de los siguientes números:
a) *576, 96* c) *1.414, 910, 700*
b) *168, 252, 315* d) *2.264, 360, 432, 378*

2) En el cálculo del MCD de dos números, se obtuvo el siguiente esquema mediante las divisiones sucesivas. Llene con números los espacios señalados con *x*.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *2* | *6* | *1* | *2* |
| *x* | *x* | *x* | *x* | *6* |
| *x* | *x* | *x* | *0* | |

3) En el MCD de dos números se obtuvo como cociente, mediante las divisiones sucesivas, los números *3, 6, 1* y *3*. Si se sabe que el MCD es *4*, determine cuáles son esos dos números.

4) El MCD de dos números es *12* y los cocientes obtenidos en el esquema de las divisiones sucesivas son *1, 3* y *2*. ¿Cuáles son esos dos números?

## 2.8 Mínimo común múltiplo (MCM)

Consideremos los números *3, 4* y *6*, y el conjunto de sus múltiplos, *M(3), M(4) y M(6)*.

$$M(3) = \{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24\ .....\}$$
$$M(4) = \{0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ 32\ .....\}$$
$$M(6) = \{0,\ 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42\ ....\}$$

A continuación, consideremos el conjunto de los múltiplos comunes a *3, 4* y *6* con excepción de cero, que es el múltiplo común. Sabemos que el conjunto de los múltiplos comunes es el conjunto intersección;

por ejemplo:

$$M(3) \cap M(4) \cap M(6) = \{12, 24, 36\ldots\}$$

Se observa que los conjuntos *M(3), M(4) y M(6)* son ordenados y finitos. Asimismo, el conjunto intersección posee un mínimo; es decir, un valor menor que todos los demás. En este caso, es el número *12*.

Este valor se llama *mínimo común múltiplo de los números dados (3, 4 y 6)*.

Y se escribe del siguiente modo:

$$MCM\ (3, 4, 6) = 12$$

De manera genérica, indicaremos:

$$MCM\ (a, b, c) = M$$

## 2.9 Cálculo del MCM de varios números

### *Primer método*

Mediante la descomposición de los factores primos.

Veamos primero lo que debe ocurrir entre los factores primos de un número N y su múltiplo M.

Ejemplos:

1) *36* es múltiplo de *9*. Se descomponen ambos y se observa lo siguiente: $36 = 2^2 \times 3^2$ y $9 = 3^2$; es decir, *36* contiene $3^2$ ó $3 \times 3$, que son los factores primos de *9*.



2) *180* es múltiplo de *45*. Se observa que $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ y $45 = 3^2 \times 5$. Esto quiere decir que *180* contiene todos los factores primos de *45*.

Podemos afirmar lo siguiente:

> *Si M es múltiplo de N, entonces M contiene todos los factores primos de N.*

Ahora calculemos el MCM *(12, 30, 42)*.

Una vez realizada la descomposición, obtenemos:

$$12 = 2^2 \times 3$$
$$30 = 2 \times 3 \times 5$$
$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

Luego, para que el número *M* sea múltiplo común o mínimo común múltiplo de *12, 30, 42*, debe contener, por lo menos, todos los factores primos que figuran en *12, 30, 42.* Debe contener, por lo menos, los factores

$$2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

En caso de contener únicamente esos factores, será el múltiplo común menor o el mínimo común múltiplo de los números dados.

Se deduce, entonces, lo siguiente:

Para calcular el MCM de varios números se procede de la siguiente manera:

a) se descomponen los números en factores primos;

b) se toma el producto de los factores primos comunes y no comunes a esas descomposiciones, y cada uno de ellos con el mayor de los exponentes que dicho factor posee en las descomposiciones.

Ejemplo:

1) Calcular el MCM de los números *105, 625 y 343*.

Al descomponer, vemos lo siguiente:

$105 = 3 \times 5 \times 7$
$625 = 5^4$
$343 = 7^3$

$MCM\ (105, 625, 343) = 3 \times 5^4 \times 7^3 = 3 \times 625 \times 343$
$MCM\ (105, 625, 343) = 643.125$

En la práctica, la descomposición se puede realizar en un solo esquema, en el que los factores primos comunes y no comunes se colocan a la derecha de una línea vertical que separa los números dados de dichos factores, de la siguiente manera:

Calcular el MCM de *90, 105 y 135*.

$$\begin{array}{rcrcr|l} 90 & - & 105 & - & 135 & 2 \\ 45 & - & 105 & - & 135 & 3 \\ 15 & - & 35 & - & 45 & 3 \\ 5 & - & 35 & - & 15 & 3 \\ 5 & - & 35 & - & 5 & 5 \\ 1 & - & 7 & - & 1 & 7 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array}$$



$MCM\ (90, 105, 135) = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2 \times 3^3 \times 5 \times 7$
$MCM\ (90, 105, 135) = 1.890$

Podemos concluir lo siguiente:

*Cuando dos números son primos entre sí, el MCM de ambos es igual al producto.*

Ejemplo:

*5* y *8* son primos entre sí.
Luego, el MCM $(5, 8) = 5 \times 8 = 40$.

Ejercicios:

Calcular el MCM de los siguientes números mediante la descomposición de los factores primos:

1) *18, 30, 48*
2) *18 y 19*
3) *60, 84, 132, 120*
4) *1.225, 1.715, 70*

5) Del aeropuerto Santos Dumont, parten aviones hacia São Paulo cada 20 minutos, hacia el sur del país cada 40 minutos y hacia Brasilia cada 100 minutos. A las 8.00 horas hay una partida simultánea. ¿Cuáles son las otras horas, hasta las 18.00, en las que hay partidas simultáneas?

6) Tres satélites artificiales giran alrededor de la Tierra en órbitas constantes; el tiempo de rotación del primero es 42 minutos; el del segundo, 72 minutos; y el del tercero, 126 minutos. En un momento dado, los tres pasan por un mismo meridiano (pero en latitudes diferentes). ¿Después de cuánto tiempo volverán a pasar simultáneamente por ese meridiano?

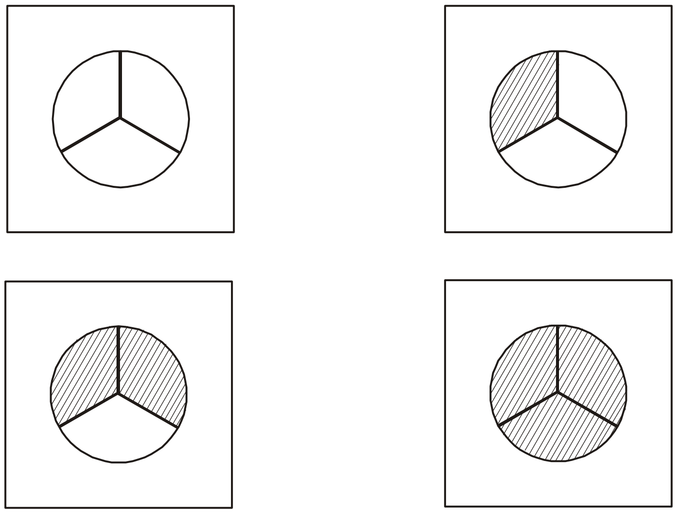
# 3. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

## 3.1 Números fraccionarios

Tenemos ahora un nuevo problema: el de la división del tipo *2:3*, que significa *a:b,* donde *a* no es múltiplo de *b*. Este problema no se resuelve en el conjunto *N* de los enteros que hemos visto. Tenemos, pues, que ampliar el campo de los números una vez más, y así podremos trabajar con un nuevo tipo de número. A continuación estudiaremos la noción de fracción.

## 3.2 Noción de fracción

Tomemos cualquier entero. La figura geométrica del círculo es ideal para representar un entero. Vamos a dividirlo en tres partes iguales y luego vamos a tomar una, dos o inclusive tres partes iguales de ese círculo, conforme lo indican las siguientes figuras:





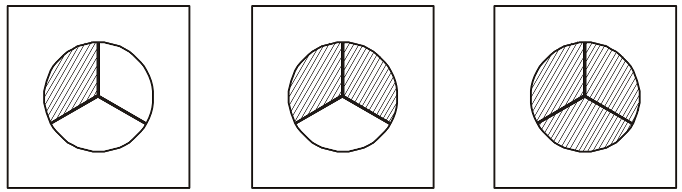
Hemos dividido el entero en tres partes y de manera sucesiva, hemos tomado una, dos y tres partes.

Por convención, se establece lo siguiente:

a) El número que indica en cuántas partes se dividió el entero se coloca bajo una línea horizontal (______) que se llama *trazo de fracción* (en el caso que hemos visto, en tres partes).

b) El número que indica cuántas partes tomamos o deseamos representar se coloca sobre el trazo de fracción (en el caso examinado fueron, sucesivamente, una, dos y tres partes).

Tenemos:



$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{3}$

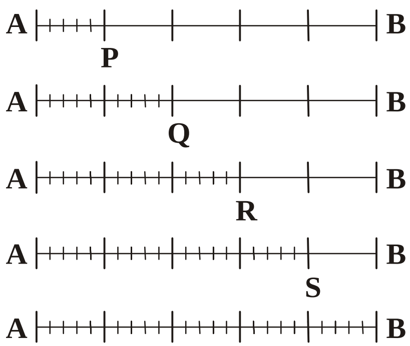
Todas las fracciones de las figuras anteriores se llaman *tercios*. El número que queda bajo el trazo de fracción recibe el nombre de *denominador* porque es el que le da el nombre a la fracción.

El número que queda sobre el trazo de fracción y que indica el número de partes que tomamos se llama *numerador*.

De manera más simple, podemos decir que se llama *fracción* o *número fraccionario* a una o más partes iguales en las que se divide un entero.

Asimismo, podemos imaginar el entero como si fuese un segmento de recta —una parte de una recta limitada por dos puntos— y proceder de manera similar:

Para un segmento AB, tendríamos:




$AP = \frac{1}{5}$ *de AB*

$AQ = \frac{2}{5}$ *de AB*

$AR = \frac{3}{5}$ *de AB*

$AS = \frac{4}{5}$ *de AB*

$AB = \frac{5}{5}$ *de AB*

## 3.3 Cómo leer una fracción

Se deben distinguir tres casos:

### *Primer caso*

Los denominadores son los números *2, 3, 4, 5, 6, 7, 8* y *9*.

Se lee el número que corresponde al numerador, seguido de *medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos y novenos,* según los denominadores sean, respectivamente, *2, 3, 4, 5, 6, 7, 8* y *9*.



Ejemplos:

$\frac{3}{8}$ = *3 octavos* $\qquad$ $\frac{1}{8}$ = *1 octavo*

$\frac{5}{7}$ = *5 séptimos* $\qquad$ $\frac{1}{7}$ = *1 séptimo*

### *Segundo caso*

Los denominadores son potencias enteras de *10 (10, 100, 1.000,* etcétera).

Se lee el numerador seguido del denominador, que a su vez se lee en forma ordinal.

$\frac{3}{10}$ = *3 décimos* $\qquad$ $\frac{5}{1.000}$ = *5 milésimos*

$\frac{1}{100}$ = *1 centésimo* $\qquad$ $\frac{17}{10.000}$ = *17 décimos de milésimos*

### *Tercer caso*

Los denominadores son números distintos de los mencionados en los casos primero y segundo.

Se lee el numerador seguido del denominador, al que se añade el sufijo *-avo* (o, en plural, *-avos),* según el numerador sea *1* ó mayor que *1*.

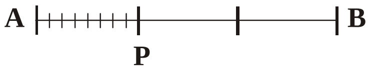
$\frac{1}{17}$ = *un 17avo* $\qquad$ $\frac{3}{17}$ = *3 17avos*

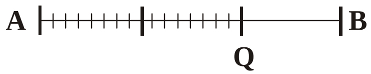
$\frac{1}{26}$ = *un 26avo* $\frac{15}{26}$ = *15 26avos*

## 3.4 Fracciones propias, impropias y aparentes

### *Fracciones propias*

Son aquellas fracciones cuyo numerador es menor que el denominador y que, por consiguiente, representan fracciones; es decir, partes de un entero.

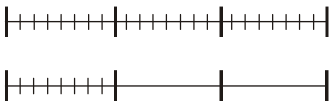


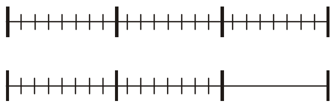

$$AP = \frac{1}{3} \text{ de } AB \qquad AQ = \frac{2}{3} \text{ de } AB$$

### *Fracciones impropias*

Llamamos *fracciones impropias* a aquellas cuyo numerador es mayor que el denominador y que, por consiguiente, representan enteros y fracciones.



$= \frac{4}{3}$

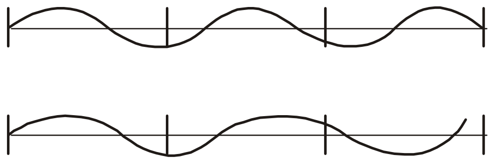


$= \frac{5}{3}$

### *Fracciones aparentes*

Llamamos *fracciones aparentes* a aquellas que representan enteros y fracciones, y cuyo numerador es múltiplo del denominador.





$= \frac{6}{3} = 2$ *enteros*

## 3.5 Casos particulares de fracciones

1) Si el numerador de una fracción es cero, la fracción es igual a cero.

   En efecto: *0/5 = 0*; se dividió el entero en *5* partes y ninguna fue tomada.

2) Si el denominador es igual a cero, la fracción no tiene significado porque no tiene sentido dividir el entero en cero partes.

   Por ejemplo, *5/0* no existe; no tiene sentido aritmético.

3) Si el denominador de la fracción es la unidad, la fracción es igual al entero representado por el numerador.

   Ejemplo: $\frac{5}{1} = 5$ $\frac{10}{1} = 10$

4) Si el numerador es igual al denominador, la fracción es igual a la unidad.

$$\frac{4}{4} = 1; \qquad \frac{5}{5} = 1; \qquad \frac{120}{120} = 1$$

## 3.6 Propiedades de las fracciones

### *Propiedad fundamental*

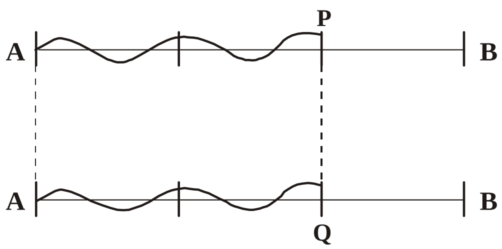
Al multiplicar o al dividir los términos de una fracción por un mismo número diferente de cero se obtiene una fracción equivalente a la fracción dada.

Comprobación:

Dada la fracción *2/3*. Al multiplicar sus términos por *2* (por ejemplo) se obtiene *4/6*.

Debemos demostrar que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Para *2/3* obtendremos el siguiente gráfico:




$$AP = \frac{2}{3} \text{ de } AB$$

Si representamos 4/6 del mismo entero, se tiene AQ = 4/6 de AB.

Como AP = AQ, entonces se tiene que *2/3* de AB = *4/6* de AB,



donde:

$$\boxed{\frac{2}{3} = \frac{4}{6}}$$

Esto equivale a multiplicar los términos de la fracción por *2*. Si hubiéramos representado primero *4/6* y después *2/3*, hubiéramos llegado a la conclusión de que

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Esto equivale a dividir los términos de la fracción por un mismo número y obtener una segunda fracción equivalente a la primera.

### *Primera inferencia: simplificación de fracciones*

Una fracción puede ser simplificada al dividir sus términos por un factor común.

**Primer caso: simplificación por cancelación.** Consiste en realizar divisiones sucesivas de los términos de la fracción por factores comunes.

Ejemplo:

Simplificar:

1) *12/18*

Al dividir sus términos por *2* y luego por *3*, da como resultado: $\dfrac{12}{18} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

2) $\dfrac{144}{216} = \dfrac{72}{108} = \dfrac{36}{54} = \dfrac{18}{27} = \dfrac{2}{3}$

**Segundo caso: simplificación con el MCD.** El caso más simple de simplificación consiste en dividir los términos de la fracción por el MCD.

Ejemplo:

Simplificar:

1) $\dfrac{108}{576}$

*El MCD (108, 576) = 36;*

luego: $\dfrac{108 : 36}{576 : 36} = \dfrac{3}{16}$

2) $\dfrac{289}{323}$

*El MCD (289, 323) = 17;*

luego: $\dfrac{289 : 17}{323 : 17} = \dfrac{17}{19}$



## *Segunda inferencia: reducción de fracciones a un mismo denominador*

Cuando dos o más fracciones tienen denominadores diferentes se llaman *heterogéneas*.

Ejemplo: $\dfrac{3}{5}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}$ son heterogéneas.

Cuando dos o más fracciones tienen denominadores iguales, se llaman *homogéneas*.

Ejemplo: $\dfrac{3}{7}; \dfrac{1}{7}; \dfrac{5}{7}$ son homogéneas

Por lo tanto, reducir las fracciones al mismo denominador, significa convertirlas en homogéneas.

Dadas las fracciones $\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{5}{6}$

Obtenga, a partir de las fracciones dadas, fracciones homogéneas equivalentes a las primeras.

En conclusión, debemos tratar de encontrar cuáles son los números menores por los que se deben multiplicar los denominadores de las fracciones para que sean iguales.

Se sigue el siguiente procedimiento:

a) Se determina el MCM de los denominadores:

*MCM (2, 3, 4, 6) = 12*

b) Se divide el MCM hallado *(12)* por los denominadores de las fracciones, y el cociente obtenido en cada caso debe ser multiplicado por los numeradores. Por propiedad fundamental, se deberá obtener una fracción equivalente a la primera.

Así, tendremos: $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}$

$$\frac{6}{12}; \frac{8}{12}; \frac{9}{12}; \frac{10}{12}$$

Ejemplo:

Reduzca las siguientes fracciones al menor denominador común:

$$\frac{3}{8}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{3}{4}$$

a) Se encuentra el MCM $(8,\ 2,\ 5,\ 4) = 40$

b) Se multiplican los numeradores de cada fracción por el cociente entre el MCM hallado y el denominador de dicha fracción.

$$\frac{15}{40}; \frac{20}{40}; \frac{24}{40}; \frac{30}{40}$$

En la práctica, se puede adoptar la siguiente regla:

*Para reducir dos o más fracciones al menor denominador común:*

*a) Se encuentra el MCM de los denominadores; dicho MCM será el menor denominador común.*



*b) Se multiplica el numerador de cada fracción por el cociente entre el denominador común y el primer denominador de la fracción.*

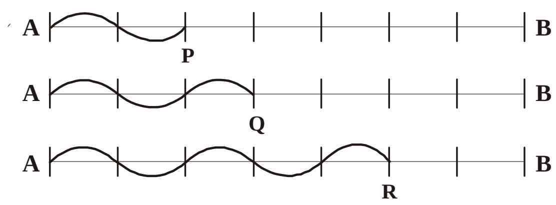
## *Tercera inferencia: comparación de fracciones*

Comparar dos o más fracciones quiere decir determinar una relación de igualdad o desigualdad entre ellas. Debemos examinar tres casos.

**Primer caso: cuando las fracciones son homogéneas**

Comparar: $\frac{2}{7}; \frac{3}{7}; \frac{5}{7}$

Gráficamente, tendremos:




$AP = \frac{2}{7}$ de $AB$

$AQ = \frac{3}{7}$ de $AB$

$AR = \frac{5}{7}$ de $AB$

Como $AP < AQ < AR$ (el signo $<$ significa 'menor'), entonces:

$$\frac{2}{7} \text{ de } AB < \frac{3}{7} \text{ de } AB < \frac{5}{7} \text{ de } AB$$

o, en relación con el mismo entero,

$$\frac{2}{7} < \frac{3}{7} < \frac{5}{7}$$

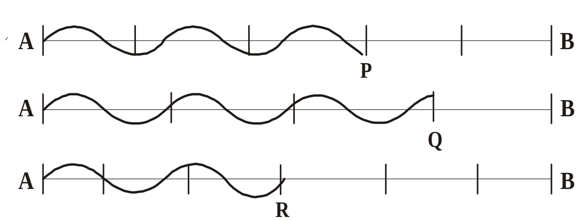
de lo cual se deduce lo siguiente:

*Cuando varias fracciones son homogéneas, la mayor de ellas es la que tiene mayor numerador.*

**Segundo caso: cuando las fracciones tienen numeradores iguales**

Comparar: $\frac{3}{5}; \frac{3}{4}; \frac{3}{7}$

Si tomamos el mismo entero *AB*, tenemos:




$$AP = \frac{3}{5} \text{ de } AB$$

$$AQ = \frac{3}{4} \text{ de } AB$$

$$AR = \frac{3}{7} \text{ de } AB$$

Como $AR < AP < AQ$, vemos: *3/7* de *AB* < *3/5* de *AB* < *3/4* de *AB* o, en relación con el mismo entero:

$$\frac{3}{7} < \frac{3}{5} < \frac{3}{4}$$

De lo cual se infiere lo siguiente:

*Cuando varias fracciones tienen el mismo numerador, la mayor de ellas es la que tiene menor denominador.*



**Tercer caso: cuando las fracciones son heterogéneas**

Comparar: $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}$

En este caso, se debe reducir las fracciones a un denominador común, pero únicamente al menor denominador común.

$$\frac{8}{12}; \frac{9}{12}; \frac{6}{12}; \frac{10}{12}$$

Como las fracciones resultantes son homogéneas, volvemos al primer caso; es decir:

$$\frac{6}{12} < \frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{10}{12}$$

o, en orden creciente,

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$$

mientras que en orden decreciente, tendríamos:

$$\frac{5}{6} > \frac{3}{4} > \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

Ejercicios:

1) Obtenga tres fracciones equivalentes a *3/5*.

Basta tomar los términos de la fracción *3/5* y multiplicarlos por un número diferente de cero.

$$\frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}; \quad \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}; \quad \frac{3 \times 10}{5 \times 10} = \frac{30}{50}$$

2) Obtenga una fracción equivalente a *3/4* cuyo denominador sea *60*.

Como $60 = 4 \times 15$ (es decir, como *60* es múltiplo de *4*), se puede realizar el problema.

Basta multiplicar el numerador por el mismo factor *15*.

Por lo tanto, $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$

3) Obtenga dos fracciones equivalentes a *12/18* cuyos denominadores sean *30* y *42*.

Se reduce *12/18* a su forma equivalente más simple:

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{2}{3} = \frac{x}{30}$$

Para determinar el valor desconocido *(x)* del numerador de la nueva fracción, se aplica $30 \div 3 = 10$. Por lo tanto, $10 \times 2 = 20$. Luego:

$$\frac{2}{3} = \frac{20}{30}$$

Análogamente: $2/3 = y/42$. Para determinar el numerador *y* se aplica: $42 : 3 = 14$; $14 \times 2 = 28$; donde $2/3 = 28/42$.



4) Escriba una fracción equivalente a *5/6* cuya suma de términos sea *88*.

Como la suma de los términos de *5/6* es *11*, para determinar el factor por el que se multiplicarán los términos de *5/6*, se aplica que $88 : 11 = 8$.

*8* es el factor que se buscaba. Luego:

$$\frac{5 \times 8}{6 \times 8} = \frac{40}{48}$$

En efecto, $40 + 48 = 88$.

5) Halle una fracción equivalente a *15/24* cuya suma de términos sea *78*.

*15/24* es equivalente a *5/8*; basta simplificar *15/24* y se obtiene *5/8*. La suma de los términos de *5/8* es $5 + 8 = 13$.

Se obtiene un valor por el cual se multiplicarán los términos de *5/8*.

Aplicando: $78 : 13 = 6$

Luego: $\frac{5 \times 6}{8 \times 6} = \frac{30}{48}$; se tiene $\frac{15}{24} = \frac{5}{8} = \frac{30}{48}$

o bien : $\frac{15}{24} = \frac{30}{48}$

*Otras propiedades*

1) Una fracción aumenta dos, tres… etcétera veces cuando *su numerador se multiplica por 2, 3…* etcétera.

2) Una fracción disminuye dos, tres … etcétera veces cuando *su denominador se multiplica por 2, 3…* etcétera.

Verifique estas propiedades gráficamente.

Todo número entero *n* puede ser escrito en forma de fracción.

En efecto, dado el entero *3,* que puede escribirse *3/1* ó *6/2* ó *9/3,* solo basta aplicar:

$$3 = \frac{3 \times 2}{1 \times 2} = \frac{6}{2}$$

$$3 = \frac{3 \times 3}{1 \times 3} = \frac{9}{3}, \text{ etcétera.}$$

Es así que todo entero $n \in N$ se escribe en una forma $p/q$ siendo $q \neq 0$ ( $\neq$ se lee *diferente).*

Podemos hablar entonces del conjunto de los números racionales absolutos.

## 3.7 Conjunto de los números racionales absolutos

Diremos que un número es racional cuando puede ser colocado bajo la forma $p/q$, siendo $q \neq 0$.



Nos damos cuenta de que:

a) las fracciones son racionales: $\frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{7}{8}; \frac{1}{3}; \cdots$

b) los enteros son racionales: $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3}; \cdots$

c) el cero es racional: $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}; \cdots$

Obtenemos, entonces, un nuevo conjunto numérico llamado *conjunto de los números racionales absolutos* que representamos por *Qa*:

$$Qa = \left\{ q, \text{ donde } q = \frac{a}{b}, \text{ siendo } a, b \in N \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

Vemos lo siguiente:

$$n \in N^* \rightarrow n \in Qa$$
$$n \in N \rightarrow n \in Qa$$

Por consiguiente, *N* y *N** son subconjuntos de *Qa* y podemos escribir lo siguiente:

$$\boxed{N^* \subset Qa} \quad \boxed{N \subset Qa} \quad \therefore \quad \boxed{N^* \subset N \subset Qa}$$

Ejercicios:

1) Escriba, basándose en la propiedad fundamental, tres fracciones ordinarias equivalentes a cada una de las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{25}{30}$

2) Escriba una fracción equivalente a las siguientes:

a) $\frac{3}{4}$ cuyo denominador sea *56*

b) $\frac{15}{45}$ cuyo denominador sea *27*

3) Simplifique cada una de las siguientes fracciones:

a) $\frac{180}{240}$ b) $\frac{289}{2.057}$ c) $\frac{121}{2.057}$ d) $\frac{343}{490}$

Reduzca los siguientes grupos de fracciones a su denominador común:

4) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}$

5) $\frac{3}{7}; \frac{1}{12}; \frac{5}{42}; \frac{8}{21}$

Escriba cada uno de los siguientes grupos de fracciones según el orden decreciente de sus valores:

6) $\frac{3}{8}; \frac{5}{8}; \frac{1}{8}; \frac{7}{8}$

7) $\frac{8}{3}; \frac{8}{5}; \frac{8}{11}; \frac{8}{7}$

8) $\frac{4}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}; \frac{6}{5}$



# 4. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON FRACCIONES

## 4.1 Adición de fracciones

En la adición de fracciones, distinguimos tres casos:

**Primer caso: cuando las fracciones son homogéneas.** Si las fracciones son homogéneas, se suman los numeradores y se da el denominador común al resultado.

Ejemplo: $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$

**Segundo caso: cuando las fracciones son heterogéneas.** Por ejemplo, para efectuar la suma:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

al reducir al mismo denominador, tenemos:

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12}$$

y aplicando la regla del primer caso,

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{8+3+2}{12} = \frac{13}{12}$$

**Tercer caso: adición de enteros y fracciones. Números mixtos.**

Dada la suma: $2 + \frac{1}{4}$

El número $2$ puede escribirse como $\frac{2}{1}$ y la suma: $\frac{2}{1} + \frac{1}{4}$.

Luego, reduciendo al mismo denominador, se tiene:

$$\frac{8}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8+1}{4} = \frac{9}{4}$$

Así: $2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

La suma $2 + 1/4$ puede indicarse, como se hace comúnmente, por $2$ *y* $1/4$, o de una manera más sencilla: $2\ 1/4$; es decir, un número mixto de entero y fracción.

Entonces, es válida la igualdad $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

que en la práctica se efectúa de acuerdo con la siguiente regla:

*Regla para transformar números mixtos en fracciones impropias*

> *Se multiplica la parte entera por el denominador de la parte fraccionaria y se le suma al producto el numerador de dicha parte. El resultado será el numerador de la fracción impropia a la cual se le da el mismo denominador de la parte fraccionaria.*



Ejemplos:

$$3\frac{1}{5} = \frac{3 \times 5 + 1}{5} = \frac{16}{5}$$

$$4\frac{1}{3} = \frac{4 \times 3 + 1}{3} = \frac{13}{3}$$

***Extracción de enteros de fracciones impropias***

Una fracción impropia contiene enteros. En efecto,

$$\frac{9}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} \text{ ó}$$

$$\frac{9}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{4} \text{ ó } \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$$

que se indica: $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

El problema consiste en verificar cuántos $4/4$ contiene $9/4$, para lo cual basta dividir el numerador $9$ por el denominador $4$ de la fracción; es decir:

$$\frac{9}{4} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \longrightarrow \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Del mismo modo:

$$\frac{8}{3} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \longrightarrow \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

De lo cual se deduce la siguiente regla:

> *Para extraer los enteros de una fracción impropia, se divide el numerador por el denominador; el cociente indicará la parte entera del número mixto y la diferencia será el numerador de la parte fraccionaria que conserva el denominador inicial.*

## 4.2 Sustracción de fracciones

En la sustracción se opera de la misma manera que en la adición cuando las fracciones son homogéneas.

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Es decir:

> *Se sustraen los numeradores y se le da al resultado el denominador común de las fracciones.*

Si las fracciones son heterogéneas, se tiene:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$$

Reduciendo al menor denominador común:

$$\frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6-1}{8} = \frac{5}{8}$$



## 4.3 Multiplicación de fracciones

El producto de dos fracciones es una fracción en la cual el numerador es el producto de los numeradores, y el denominador, el producto de los denominadores de las fracciones dadas.

Ejemplos:

1) $$\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 1 \times 5}{5 \times 4 \times 6}$$

Antes de efectuar la multiplicación se debe realizar la simplificación por cancelamiento. En el producto anterior obtendríamos el siguiente resultado:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \frac{1}{4} \times \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{1}{8}$$

2) Efectuar: $3\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{13} \times \frac{1}{6}$

En primer lugar, se reducen los números mixtos en fracciones impropias, y se obtiene como resultado:

$$\frac{13}{4} \times \frac{14}{13} \times \frac{1}{6}$$

Hecha la simplificación, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{1}{2} \times \frac{7}{1} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$$

El producto de un número entero por una fracción se efectúa considerando siempre que el entero es igual a una fracción cuyo numerador es el mismo entero y cuyo denominador es la unidad.

## 4.4 División de fracciones

Consideremos la división 2/3 : 3/5 cuyo resultado es desconocido, por lo cual lo llamaremos $x$. Entonces,

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = x$$

Sin embargo, según la definición de división, se tiene:

$$x \times \frac{3}{5} = \frac{2}{3}$$

Como nuestro problema es hallar $x$, y se sabe que $3/5 \times 5/3 = 1$, entonces vamos a multiplicar ambos miembros de la igualdad $x \times 3/5 = 2/3$ por $5/3$, o sea, la fracción inversa de $3/5$.
Veamos:

$$x \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3}$$

o bien $x \times 1 = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3}$

En resumen:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3}$$



De lo cual se deduce la siguiente regla:

> *Para dividir una fracción por otra, se multiplica la primera por la fracción inversa de la segunda.*

Ejemplos:

1) $\frac{3}{10} : \frac{6}{5} = \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{4}$

2) $3\frac{1}{4} : 2\frac{3}{5} = \frac{13}{4} : \frac{13}{5} = \frac{13}{4} \times \frac{5}{13} = \frac{5}{4}$

3) $4\frac{1}{2} : 2 = \frac{9}{2} : 2 = \frac{9}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$

## 4.5 Fracción de fracción

Para calcular *2/3* de *12*

debemos dividir *12* en tercios y después tomar dos partes. Esta operación equivale a dividir *12* entre *3* y multiplicar por *2* el resultado, o sea:

$$\frac{2}{3} \text{ de } 12 = \frac{2}{\cancel{3}_{1}} \times \cancel{12}^{4} = 2 \times 4 = 8$$

La preposición *de* se substituye por el signo de multiplicación.

Ejemplos:

1) $\frac{3}{5}$ *de 15* $= \frac{3}{5} \times 15 = 9$

2) $\frac{2}{5}$ *de* $\frac{15}{18} = \frac{2}{5} \times \frac{15}{18} = \frac{1}{3}$

3) $\frac{2}{5}$ *de* $\frac{10}{15}$ *de 20* $= \frac{2}{5} \times \frac{10}{15} \times \frac{20}{1} = \frac{16}{3}$

Ejercicios:

1) Extraer los enteros de las siguientes fracciones:

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{125}{15}$ c) $\frac{289}{17}$ d) $\frac{343}{49}$ e) $\frac{1.024}{32}$

2) Transformar los siguientes números mixtos en fracciones impropias:

a) $5\frac{1}{4}$ b) $12\frac{3}{5}$ c) $7\frac{1}{6}$ d) $121\frac{1}{10}$ e) $3\frac{13}{5}$

Calcular las siguientes expresiones fraccionarias:

3) $4 + \frac{1}{7} - (\frac{2}{3} + 2 - \frac{5}{21})$

4) $2 + \frac{1}{9} - (\frac{4}{7} + \frac{11}{3} - 4) + \frac{1}{63}$



5) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}) - \frac{8}{27} \times \frac{9}{16} + (\frac{3}{7} - \frac{5}{42} + 1) \times \frac{2}{11} + \frac{2}{7}$

6) $(14 : \frac{25}{9} \times \frac{5}{6} : \frac{21}{5} + \frac{3}{10}) : (5 + \frac{126}{35}) + \frac{18}{43}$

7) $\frac{14}{5} \times (\frac{5}{7} : \frac{5}{4} - \frac{1}{14}) : (5 - \frac{2}{3}) \times \frac{65}{12} - \frac{3}{4}$

8) $(7 - \frac{15}{4}) \times (1 + \frac{5}{13}) - \left[(\frac{2}{3} + 4) : \frac{7}{6} - \frac{5}{8}\right] - \frac{1}{4}$

9) Se consumió 3/5 de la carga de un medidor que contenía 120 kg de sulfato de aluminio. ¿Cuántos kg de sulfato de aluminio se consumieron?

10) Los 3/4 de la carga de un tostador de cal equivalen a 180 kg. ¿A cuánto equivale el total de la carga?

11) Debido a la suspensión de energía eléctrica, la planta de tratamiento de agua —que trabaja 18 horas por día— trabajó solo 7/9 del tiempo habitual. ¿Cuánto tiempo trabajó?

12) Vivo en una calle que mide 3.240 metros. Si el número de mi casa equivale a 2/3 del metraje de la calle, ¿cuál es el número de mi casa?

# 5. FRACCIONES Y NÚMEROS DECIMALES

## 5.1 Fracciones decimales

Se llama *fracción decimal* a toda fracción cuyo denominador es una potencia entera de 10.

Ejemplo: $\frac{9}{10}$ ; $\frac{17}{100}$ ; $\frac{121}{1.000}$

*3/10* representa, como ya hemos visto, las tres partes de un entero que se dividió en diez partes.

Aritméticamente también puede representarse con el símbolo *0,3* que se lee "3 décimos". Igualmente, si tuviéramos *3/100* se emplearía el término *0,03* (tres centésimos).

La fracción decimal *3/10* escrita bajo la forma *0,3*, recibe el nombre de *número decimal*.

## 5.2 Cómo leer un número decimal

Para leer un número decimal, se debe tener en cuenta los nombres que reciben las cifras decimales (lugares decimales) a partir de los décimos, que van separados de la parte entera por una coma.

Observemos los siguientes ejemplos con su correspondiente lectura:

| | |
|---|---|
| *0,1* | *un décimo* |
| *0,01* | *un centésimo* |
| *0,001* | *un milésimo* |
| *0,0001* | *un décimo de milésimo* |



| | |
|---|---|
| *0,00001* | *un centésimo de milésimo* |
| *0,000001* | *un millonésimo* |
| *0,0000001* | *un décimo millonésimo.* |

Por ejemplo, para leer *2,437* se dice "2 enteros y 437 milésimos" o "2 enteros, 4 décimos, 3 centésimos y 7 milésimos".

## 5.3 Transformación de fracciones decimales a números decimales

Dada la fracción *3.791/1.000*, descomponemos el numerador en unidades diferentes y tenemos:

$$\frac{3.791}{1.000} = \frac{3.000}{1.000} + \frac{700}{1.000} + \frac{90}{1.000} + \frac{1}{1.000}$$

o, simplificando las fracciones, se tiene:

$$\frac{3.791}{1.000} = 3,791$$

A partir de esta igualdad se deduce la siguiente regla:

> *Para transformar una fracción decimal en un número decimal, basta dar al numerador tantas cifras decimales como ceros tenga el denominador.*

Ejemplos:

1) $\frac{31}{100} = 0,31$

2) $\frac{5}{1.000} = 0{,}005$

Ahora podemos examinar el problema inverso.

## 5.4 Transformación de números decimales en fracciones decimales

Todo número decimal es igual a una fracción en la cual el numerador es el número decimal sin la coma y el denominador es la unidad seguida de tantos ceros como fueran las cifras decimales del número dado.

Ejemplos:

Transformar en fracciones decimales y simplificar, si es necesario.

1) $0{,}015 = \frac{15}{1.000} = \frac{3}{200}$

2) $1{,}25 = \frac{125}{100} = 1\frac{1}{4}$

Cuando el número decimal presenta enteros, como en el ejemplo anterior, se puede obtener un número mixto de la transformación si se realiza el siguiente procedimiento:

$$1{,}25 = 1\frac{25}{100} = 1\frac{1}{4}$$

3) $3{,}75 = 3\frac{75}{100} = 3\frac{3}{4}$



## 5.5 Propiedades de los números decimales

### *Primera propiedad*

> *Un número decimal no se altera cuando se aumenta uno o más ceros a la derecha de la parte decimal.*

*Verificación*: para que la propiedad sea verdadera, debemos comprobar que, por ejemplo,

$$0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300, \text{ etc}\ldots$$

Si se toma el número decimal *0,3* y se transforma en fracción decimal, se tiene:

$$0{,}3 = \frac{3}{10}$$

Ahora, de acuerdo con la propiedad fundamental de las fracciones, podemos multiplicar los términos de *3/10* por *10*, por *100*, por *1.000*, etcétera, y siempre obtendremos fracciones equivalentes a *3/10*.

Por consiguiente,

$$\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1.000}$$

o, en la forma de números decimales,

$$0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300 = 0{,}3000$$

lo cual comprueba la propiedad.

*Segunda propiedad*

*Para multiplicar un número decimal por 10, por 100, por 1.000… etc., basta mover la coma hacia la derecha en una, dos, tres, etc. cifras.*

Ejemplos:

$$1{,}24 \times 10 = 12{,}4$$
$$1{,}24 \times 100 = 124$$
$$1{,}24 \times 1.000 = 1.240$$

*Tercera propiedad*

*Para dividir un numero decimal por 10, 100, 1.000, etcétera, basta mover la coma hacia la izquierda en una, dos, tres, etc. cifras decimales.*

Ejemplo:

$$387{,}2 : 10 = 38{,}72$$
$$387{,}2 : 100 = 3{,}872$$
$$387{,}2 : 1.000 = 0{,}3872$$

*Comprobación*: estas dos propiedades pueden verificarse de la siguiente manera:

1) $1{,}24 \times 10 = \frac{124}{100} \times 10 = \frac{124}{10} = 12{,}4$

2) $387{,}2 : 10 = \frac{3.872}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{3.872}{100} = 38{,}72$



Ejercicios:

1) Escriba bajo la forma de fracciones decimales las siguientes fracciones ordinarias:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{121}{125}$ d) $\frac{7}{25}$

2) Transformar en números decimales las siguientes fracciones decimales:

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{15.431}{100}$ c) $\frac{5.731}{1.000}$ d) $\frac{5.731}{100}$ e) $\frac{71}{10.000}$

Calcule las siguientes expresiones:

3) $0{,}1 + \frac{1}{3} + (2 + \frac{4}{15}) - (\frac{2}{25} + 0{,}4 - 0{,}12) - \frac{17}{50}$

4) $(5{,}7 - 5{,}6) + \frac{34}{15} + \frac{1}{3} - (\frac{1}{18} + 0{,}5 - 0{,}3)$

## 5.6 Conversión de fracciones ordinarias a números decimales

Transforme las siguientes fracciones en números decimales:

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{4}{11}$ 3) $\frac{5}{6}$

Puesto que una fracción indica una división del numerador por el denominador, se tiene:

1) $\frac{3}{4} \longrightarrow \begin{array}{l|l} 3 & 4 \\ \cline{2-2} 30 & 0,75 \\ \;\;20 & \\ \;\;\;0 & \end{array}$

$\frac{3}{4} = 0,75$ *es un decimal exacto*

2) $\frac{4}{11} \longrightarrow \begin{array}{l|l} 4 & 11 \\ \cline{2-2} 40 & 0,3636 \\ \;\;70 & \\ \;\;\;40 & \\ \;\;\;\;70\ldots & \\ \;\;\;\;\;4\ldots & \end{array}$

Por lo tanto $4/11 = 0,3636\ldots$ es un decimal no exacto; más precisamente, es una décima periódica simple.

El periodo es *36*. El *periodo,* entonces, es el número formado por una o más cifras que se repiten en la parte decimal.

La décima periódica es simple cuando el periodo se inicia seguidamente a la parte entera. Por ejemplo:

$0,414141\ \ldots. = 0,\overline{41}$ *es una décima periódica simple*

$2,333\ \ldots.. = 2,\overline{3}$ *es una décima periódica simple*

3) $\frac{5}{6} \longrightarrow \begin{array}{l|l} 5 & 6 \\ \cline{2-2} 50 & 0,8333\ldots \\ \;\;20 & \\ \;\;\;20 & \\ \;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;2 & \end{array}$



$\frac{5}{6} = 0,8333\ \ldots = 0,8\overline{3}$ es una décima periódica compuesta

En efecto; *0,83* tiene el periodo *3* y la parte no periódica *8*.

Se acostumbra representar las décimas con los siguientes símbolos:

$0,3636\ldots. = 0,\overline{36}$ ó $0,(36)$

$5,333\ldots = 5,\overline{3}$ ó $5,(3)$

$4,2414141\ \ldots. = 4,2\overline{41}$ ó $4,2\ (41)$

La coma (,), el trazo (‾) o incluso los paréntesis indican el periodo.

## 5.7 Condiciones para que una fracción se convierta en decimal exacto o no

Una fracción se convierte en decimal exacto cuando se puede escribir bajo la forma equivalente cuyo denominador sea una potencia entera de *10*.

En efecto: $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0,75$

Como $10 = 2 \times 5$ y entonces $100 = 2 \times 5 \times 2 \times 5$, podemos afirmar:

1) Una fracción ordinaria se convierte en decimal exacto cuando su denominador contiene solo los factores *2* y *5*, o solo *2* ó solo *5*.

Ejemplo: $\frac{3}{40}$

como $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$, entonces, la décima será exacta; en efecto: $3/40 = 0,075$.

2) Una fracción ordinaria se convierte en una décima periódica simple cuando su denominador no presenta ninguno de los factores *2* ó *5*.

Ejemplo: $\frac{5}{9}$

como $9 = 3 \times 3$, entonces la décima será periódica simple; en efecto: $5/9 = 0,555\ldots = 0,5$.

3) Una fracción ordinaria se convierte en una décima periódica compuesta cuando su denominador contiene cualquiera de los factores *2* ó *5* (o ambos) y otros factores primos cualesquiera.

Ejemplo: $\frac{5}{12}$

como $12 = 2 \times 2 \times 3$, la décima será compuesta; en efecto: $5/12 = 0,4166\ldots = 0,416$.

Entonces, surge el siguiente problema:



## 5.8 Fracciones generatrices de las décimas periódicas

La fracción generatriz de una décima es aquella que al ser transformada en número decimal dio origen a esa décima.

$\frac{5}{12}$ es la generatriz de la décima $0,41666\ldots = 0,416$

$\frac{2}{3}$ es la generatriz de la décima $0,666\ldots = 0,6$

Las generatrices se determinan siguiendo las siguientes reglas:

1) La fracción generatriz de una décima periódica simple es una fracción que tiene como numerador el periodo y como denominador tantos nueves como cifras tenga ese periodo.

Ejemplos:

Encontrar las generatrices de las siguientes décimas:

1) $0,3 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ 2) $0,36 = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$

3) $2,5 = 2\,\frac{5}{9}$

2) La generatriz de una décima periódica compuesta es una fracción en la cual el numerador está formado por la parte no periódica seguida del periodo menos la parte no periódica y el denominador tiene tantos nueves como cifras tenga el periodo, seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

Ejemplos:

Determinar las siguientes generatrices:

$$1)\ 2{,}4222\ldots = 2{,}42 = 2\,\frac{42-4}{90} = 2\,\frac{38}{90} = 2\,\frac{19}{45}$$

$$2)\ 5{,}32121\ldots = 5{,}321 = 5\,\frac{321-3}{990} = 5\,\frac{318}{990} = 5\,\frac{53}{165}$$

*Observación*: en los ejemplos anteriores o incluso en las reglas enunciadas, no hacemos referencias a la parte entera del número decimal periódico. Es conveniente dejar siempre esa parte como parte entera del número mixto que se va a obtener. Se tiene entonces:

$$3{,}4222 = 3{,}42 = 3\,\frac{42-4}{90} = 3\,\frac{38}{90} = 3\,\frac{19}{45}$$

## 6. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES RELATIVOS (Q)

En los conjuntos estudiados hasta el momento, la operación $a - b$ solo es posible cuando $a$ es mayor que $b$.

Ahora estudiaremos un conjunto en el cual esta operación siempre será posible; es decir, nos va a dar respuesta para casos como el siguiente:

$$3 - 5 \text{ ó } \frac{3}{10} - \frac{1}{2}$$

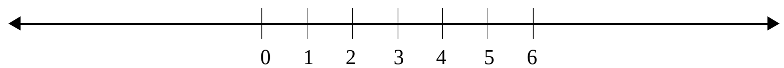


A este conjunto lo llamamos *racionales relativos*, y lo simbolizamos con la letra *Q*. Antes de continuar, haremos algunas reflexiones sobre la recta numérica.

### *La recta numérica*

La idea de número es abstracta. La civilización humana necesitó siglos para desarrollar un buen sistema de números. Mientras el hombre aún no profundizaba en el conocimiento de los números y en su uso, se utilizaron muchos esquemas. El método más acertado para esta representación fue el uso de la recta numérica.

Supongamos que la siguiente recta se extiende indefinidamente hacia los extremos. Elegimos cualquier punto de la recta y lo señalamos con *0*.




Seguidamente, elegimos otro punto a la derecha de *0* y escribimos *1*, lo cual determina una unidad de longitud de *0* a *1*.

Partimos de *0* y colocamos esta unidad repetidamente de izquierda a derecha a lo largo de la recta numérica. Lo cual determina la localización de los puntos correspondientes a los siguientes números naturales: *2, 3, 4, 5, 6, 7…*

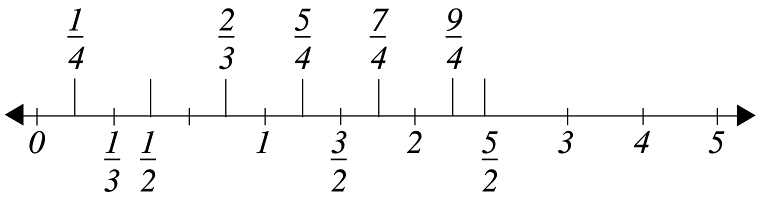
Colocamos el número *1/2* en el punto medio entre *0* y *1*.

Al colocar este segmento de longitud, mitad del segmento unitario, determinamos nuevamente los puntos adicionales correspondientes a

*1/2, 3/2, 5/2…*. Luego, con un largo de un tercio del segmento unitario y marcando esta longitud sucesivamente a la derecha de *0*, colocar los puntos *1/3, 2/3, 4/3, 5/3…*

De la misma manera, vamos a colocar en la recta numérica los puntos a la derecha de *0* correspondientes a las fracciones que tienen denominadores *4, 5, 6, 7, 8…*

Algunas de estas fracciones aparecen en la siguiente figura.




Mediante este proceso natural, colocamos cada número racional en un punto de la recta. Cada número racional se coloca en un solo punto de ella. Así, establecemos una correspondencia biunívoca entre los números racionales y algunos puntos de la recta.

Decimos que el punto correspondiente al número *2* en la recta numérica es el punto *2*. Debido a esta correspondencia entre número y punto, cada punto recibe el nombre del número que le corresponde. Esta es una de las grandes ventajas de la recta numérica.

## 6.1 Números racionales negativos

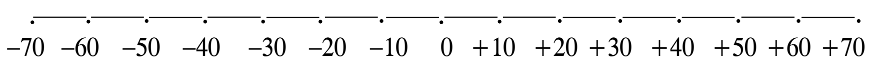
En la explicación que acabamos de realizar sobre la recta numérica, nos olvidamos de algo muy importante: no marcamos los puntos a la izquierda del cero. Solo utilizamos el segmento de recta comprendido entre el origen y el sentido positivo. Para recordar cómo marcar



estos puntos (y porque es de nuestro interés), veamos un ejemplo común, relacionado con la temperatura.

Una recta numérica que representa a la temperatura, tal como la vemos en el termómetro, por lo general es similar a la siguiente recta numérica:

Temperaturas en grados centígrados




En esta recta numérica, las temperaturas menores que cero están representadas por números a la izquierda del punto de origen y se designan con el símbolo "–". Las temperaturas mayores que cero se identifican con el signo "+". Por consiguiente, *–10* se refiere a una temperatura de 10 grados bajo cero (a la izquierda del cero). En realidad, *sobre cero* y *bajo cero* son términos que parecen más adecuados para usarlos cuando la escala es vertical.

Esta idea de distancia (o de puntos) a lo largo de una recta a los lados opuestos de un punto fijo aparece frecuentemente en el tipo de estudio que realizamos. Piense en lo frecuente que es hablar de distancias hacia la izquierda o hacia la derecha, ubicaciones al norte o al sur de un punto dado (o de un número) o de distancias medidas en sentidos opuestos a partir de un punto dado (o de un número). Todos estos ejemplos sugieren la necesidad de una recta numérica que utilice puntos tanto hacia la izquierda como hacia la derecha del punto de inicio.

Comenzamos con la recta numérica para racionales positivos, que ya hemos utilizado. Con la misma unidad de longitud, medimos distancias a la izquierda de cero como lo mostramos en la siguiente recta:

–.—.—.—.—.—.—.—.—.—.—.—. —.–

–6 –5 –4 –3 –2 –1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6

Colocamos *– 1* como opuesto a *+1* porque es una unidad ubicada a la izquierda del cero. De la misma forma, *–2* es opuesto a *+2; –1/4* está situado al lado opuesto de *+1/4*, etcétera.…

Llamamos a los números opuestos que corresponden a los puntos que están hacia la izquierda del cero *números negativos*.

Cada número negativo está a la izquierda del cero y corresponde al número positivo opuesto. Este sentido ‘hacia la izquierda’ se llama *sentido negativo*.

Representamos a los números negativos de la siguiente manera: *–1, –2, –1/4, –3/2*, etcétera, con el signo “–” a la izquierda del número. Leemos *–2* como “2 negativo”.

El símbolo negativo (“–”) indica que este número es menor que cero; esto es, que está a la izquierda del cero. Algunas veces señalamos que un número es positivo (mayor que cero) escribiendo el signo “+” delante del número. Sin embargo, no es necesario señalarlo, puesto que la escritura puede simplificarse.

Los nuevos números introducidos mediante este proceso son los números racionales negativos. El conjunto constituido por los números racionales negativos, por los números racionales positivos y el cero se llama *conjunto de los números racionales*.

El conjunto de números racionales que consiste en los enteros positivos, los enteros negativos y el cero se llama *conjunto de los números enteros relativos*. Por lo general, escribimos dicho conjunto de la siguiente manera:



$$Z = \{\ldots -4,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\ldots\}$$

Es de notar que el conjunto de los enteros esta formado solo por los números naturales y sus opuestos juntamente con el cero.

Ejemplos:

Los números negativos son tan reales y tan útiles como los positivos que ya hemos utilizado. En efecto, muchas veces los utilizamos sin llamarlos *números negativos*. Su utilidad especial está en designar la idea de ‘opuesto’ o ‘directamente opuesto’ que hemos mencionado.

Utilizamos números positivos para designar distancias al este de Brasilia. Los números negativos señalarán las distancias al oeste de Brasilia. Una recta numérica como la siguiente

–400 –300 –200 –100 0 +100 +200 +300 +400

Distancia de Brasilia en kilómetros

puede ser utilizada para señalar la posición de un avión que vuela en la ruta este-oeste de Brasilia. ¿Cómo sería interpretada la recta numérica para un avión que vuela en la ruta norte-sur?

El tiempo previo y posterior al lanzamiento de un satélite puede ser indicado en una recta numérica de la siguiente manera:

Segundos antes del lanzamiento Segundos después del lanzamiento

—.—.—.—.—.—.—.—.—.—.—.—.—.

–6 –5 –4 –3 –2 –1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6

Debe notarse que la recta numérica que utilizamos no necesita ser colocada horizontalmente. Si hablamos de altitud sobre el nivel del mar como algo positivo y de altitud bajo el nivel del mar como algo negativo, sería más adecuado utilizar una recta numérica en posición vertical.

## 6.2 Números relativos simétricos u opuestos

Dos números relativos son simétricos cuando sus imágenes sobre la recta numerada están colocadas en segmentos de recta opuestos y en la misma distancia en relación con el punto $0$. Por consiguiente, $+3$ y $-3$ son simétricos y $+7$ y $-7$ también.

Cualquier número positivo es mayor que un número negativo; de lo cual se deduce que $+3$ es mayor que su simétrico $-3$. Esta desigualdad también puede ser representada de la siguiente manera: $+3 > -3$.

## 6.3 Valor absoluto de un número relativo

El valor absoluto de un número o módulo de dicho número es el mayor valor del conjunto formado por él y su simétrico u opuesto.

Ejemplos:

El valor absoluto de $-3$ es el mayor valor entre $\{+3 \text{ y } -3\}$, que es $+3$. Esto también se escribe: $|-3| = +3$; y se lee: "módulo de $-3$ igual a $+3$".

Si dos números negativos son diferentes, el mayor de ellos es aquel que tiene menor valor absoluto. También podríamos decir que el mayor entre dos números negativos es aquel que está más cerca del cero. Con los números positivos sucede lo contrario: el mayor es el que está más alejado del cero.



## 6.4 Operaciones con números relativos

La adición y sustracción se definen simultáneamente mediante dos reglas referentes a dos elementos de las operaciones.

### *Primera regla*

Cuando los dos elementos tienen el mismo signo, se suman los valores absolutos y se da al resultado el signo común.

Ejemplos: 1) $+3 +2 = +5$ 2) $-1 -5 = -6$

3) $\frac{+1}{2} + \frac{+2}{5} = \frac{+5 + 4}{10} = \frac{+9}{10}$

### *Segunda regla*

Cuando los dos elementos tienen signos diferentes, se restan los valores absolutos y se da al resultado el signo del mayor elemento como valor absoluto.

Ejemplos: 1) $\frac{+2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{+8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{+5}{12}$

2) $-10 + 9 = -1$

La multiplicación y la división tienen también dos reglas:

### *Primera regla*

Cuando dos elementos tienen el mismo signo, se efectúa la operación indicada (multiplicación o división, según el caso) y se da al resultado el signo positivo (+).

Ejemplos: $1)\ (\frac{+1}{4})\ x\ (\frac{+2}{3}) = \frac{+1}{6}$

$2)\ (-8) : (-4) = +2$

*Segunda regla*

Cuando los dos elementos tienen signos contrarios, se efectúa la operación (multiplicación o división) y se da al resultado el signo negativo (–).

Ejemplos: 1) $\frac{(-2)}{7} : \frac{(+14)}{5} = \frac{(-2)}{7}\ x\ \frac{(+5)}{14} = \frac{-5}{49}$

2) $(+5)\ x\ (-15) = -75$

## 6.5 Eliminación de paréntesis precedidos por signos (+) o (–)

Queda por resolver, en el cálculo de los enteros relativos, cómo se eliminan los paréntesis precedidos por signos: – (–3); – (+3); + (–3); + (+3).

Basta recordar que $a$ y $+a$ son el mismo número y $a$ y$-a$ son números simétricos.

Por ejemplo, si llamamos a $+4 = a$ y a $-5 = b$, tenemos que

$+a = a \qquad + (+4) = +4$ ó
$+b = b \qquad + (-5) = -5$



Análogamente, como $-a$ es el simétrico de $a$, $-(+4) = -4$
como $-b$ es el simétrico de $b$, $-(-5) = +5$

Conclusión:

Se elimina un paréntesis teniendo en cuenta lo siguiente:

a) Cuando el paréntesis de inicio está precedido por el signo positivo, se conserva el signo del número que está dentro de los paréntesis.

b) Cuando el paréntesis de inicio está precedido por el signo negativo, se cambia el signo del número que está dentro de los paréntesis.

Ejemplos: 1) $+ (+3) = +3$ 3) $+ (-5) = -5$
2) $- (+3) = -3$ 4) $- (-3) = +3$

*Observación*: en la práctica, se procede como si se estuviera aplicando la regla de la multiplicación de números relativos.

Por ejemplo: 1) $+ (+5) = +5$ 3) $+ (-1) = -1$
2) $- (+2) = -2$ 4) $- (-2) = +2$

Ejercicios:

Eliminar los paréntesis y efectuar las operaciones siguientes:

1) $(-1) + \frac{(+1)}{3} + \frac{(-2)}{5} + (-0{,}1)$

2) $\frac{(+7)}{3} + (+0{,}4) + \frac{(+2)}{3} + \frac{(-2)}{5} + (-3)$

3) $(-15) - (-28)$

Calcular las siguientes expresiones:

4) $-2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0{,}2$

5) $-2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$

6) $\frac{-1}{3} + 1 + 0{,}2 - 0{,}10 - 0{,}666\ldots$

7) $\frac{-5}{6} - \left[3 + \left(\frac{7}{10} - 5 - \frac{3}{4}\right) - \frac{11}{24}\right]$

8) $+8 - \left\{- \left[-2 + \frac{1}{2} - \left(+2 - \frac{6}{5}\right)\right]\right\}$

9) $-2 + \left\{-1 + \left[+\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \left(0{,}1 + \frac{1}{5}\right) - 3\right] - \frac{2}{5} + 1\right\}$

10) $(-3) \times \left(-\frac{2}{-3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

11) $\left(\frac{-3}{4}\right) \times (-2) \times \left(\frac{+5}{3}\right) \times \left(\frac{-1}{8}\right)$

12) $\left(+3 - \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right)$

13) $\left(-1 + \frac{2}{4}\right) \times \left(+1 - \frac{3}{4}\right)$

14) $(0{,}5) \times (-0{,}2) \times \left(\frac{-3}{4}\right) \times (-0{,}222\ldots)$

15) $(-3) \times \left(\frac{-5}{6}\right) \times \left(\frac{1}{10} - 2\right)$

16) $(-3) \times \left(4 - \frac{7}{2}\right) \times \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right)$

17) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$

18) $\left(\frac{9}{35} - \frac{18}{25} - \frac{27}{25}\right) : \frac{9}{105}$

19) $(-9) : \left(\frac{3}{8} - \frac{7}{20} - 1\right)$

20) $\left(\frac{-3}{5}\right) : \left(-1 + \frac{2}{3} - 0{,}1\right)$

21) $\left(1 + \frac{1}{5} - 2{,}5\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)$

22) $(1 - 0{,}333\ldots) : \left(\frac{1}{2} - 1\right)$

23) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{10}\right) : \frac{3}{8} \left[- \frac{5}{12} - \left(3 - \frac{1}{2}\right) + 2\right]$

Ordenar en orden creciente:

24) $-3; -7; +2; 0; -4; -1;$

25) $+\frac{1}{3}\ ;\ +\frac{2}{5}\ ;\ 0{,}5;\ -2;\ \frac{-3}{4}$

26) $-0{,}363636\ldots;\ \frac{-3}{11};\ -0{,}38;\ +0{,}3$

Complete las siguientes tablas:

27)

| *x* | *1/2 x* |
|---|---|
| 4 | |
| | 1 |
| 0 | |
| –2 | |
| | –2 |
| –5 | |
| –6 | |
| | 10 |

28)

| *x* | *2 x* | *2 x – 3* |
|---|---|---|
| –1 | | |
| 2 | | 1 |
| –4 | –8 | |
| | 0 | |
| –7 | | |
| –9 | | –21 |

## 7. OPERACIÓN DE POTENCIACIÓN

Podemos definir la potenciación del siguiente modo:

Sea $a$ un número racional y $n$ un natural mayor o igual a *2;* se define $a^n$ como el producto de $n$ factores iguales al número $a$.



$$\underbrace{a^n = a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times a}_{n \text{ factores}}$$

$a = base$
$n = exponente$
El resultado se llamará *potencia*.

Ejemplos: 1) $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

2) $(-\frac{1}{5})^2 = (-\frac{1}{5}) \times (-\frac{1}{5}) = \frac{1}{25}$

Esta definición permite inferir reglas de signos para las potencias, como las que se dan a continuación:

1) $(+3)^2 = (+3) \times (+3) = +9$

2) $(+3)^3 = (3) \times (+3) \times (+3) = +27$

3) $(\frac{1}{5})^3 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$

4) $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = +9$

5) $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$

6) $(\frac{-1}{5})^3 = (\frac{-1}{5}) \times (\frac{-1}{5}) \times (\frac{-1}{5}) = \frac{-1}{125}$

Se infiere lo siguiente:

Todo número positivo elevado a cualquier exponente, par o impar, presentará siempre un resultado positivo.

Todo número negativo elevado a un exponente par, presenta un resultado positivo. Cuando un número negativo es elevado a un exponente impar, el resultado es negativo.

## 7.1 Propiedades de las potencias que poseen una misma base

Siempre vamos a tomar las potencias $a^n$; en las que $a$ es racional y $n$ es natural, con las convenciones usuales:

$$a^0 = 1 \qquad y \qquad a^1 = a$$

### *Primera propiedad*

$$\boxed{a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5}$$

Comprobación

$$\left.\begin{array}{l} a^3 = a \times a \times a \\ a^2 = a \times a \end{array}\right\} = a^3\, a^2 = a \times a \times a \times a \times a = a^{3+2} = a^5$$

Luego:

$$\boxed{a^3 \times a^2 = a^5}$$

Es decir que para multiplicar la potencia de la misma base $a$ se da como resultado la base común $a$, y como exponente, la suma de los exponentes.



Ejemplos:

$$1)\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+1+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$2)\ \left(\frac{-2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{5}\right) = \left(\frac{-2}{5}\right)^{2+1} = \left(\frac{-2}{5}\right)^3$$

### *Segunda propiedad*

$$\boxed{a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3}$$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{l} a^5 = a \times a \times a \times a \times a \\ a^2 = a \times a \end{array}\right\} \quad a^5 : a^2 = \frac{a \times a \times a \times \cancel{a} \times \cancel{a}}{\cancel{a} \times \cancel{a}}$$

Luego:

$$\boxed{a^5 : a^2 = a^3}$$

Esto significa que para dividir potencias que tienen una misma base, se da como resultado la base común $a$, y como exponente, la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

Ejemplos:

$$1)\ a^4 : a = a^{4-1} = a^3$$

$$2)\ \left(\frac{2}{3}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{5-4} = \frac{2}{3}$$

## *Tercera propiedad*

$$\boxed{(a^3)^2 = a^{3 \times 2}}$$

Comprobación:

$$(a^3)^2 = a^3 \times a^3 \longrightarrow a^{3+3} \longrightarrow a^{3 \times 2} \longrightarrow a^6$$

Luego:

$$\boxed{(a^3)^2 = a^6}$$

Entonces:

Para elevar una potencia a otra, se eleva la misma base al producto de los exponentes parciales.

Ejemplos:

1) $(a^2)^5 = a^{10}$

2) $[\,(-2)^3\,]^2 = (-2)^{3 \times 2} = (-2)^6$

## *Cuarta propiedad*

$$\boxed{(a \times b \times c)^3 = a^3 \times b^3 \times c^3}$$

Comprobación:

$(a \times b \times c)^3 = (a \times b \times c) \times (a \times b \times c) \times (a \times b \times c) =$

$a \times a \times a \times b \times b \times b \times c \times c \times c$. O, lo que es lo mismo,

$$\boxed{(a \times b \times c)^3 = a^3 \times b^3 \times c^3}$$



Luego:

Para elevar un producto a un exponente dado, se eleva cada factor a dicho exponente.

Ejemplos:

1) $(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$

2) $(a \times b^2 \times c^3)^2 = a^2 \times (b^2)^2 \times (c^3)^2 = a^2 \times b^4 \times c^6$

3) $(3\,a\,b^2)^4 = 3^4 \times a^4 \times b^8 = 81\,a^4b^8$

## *Quinta propiedad*

$$\boxed{a^{-2} = \frac{1}{a^2}}$$

Comprobación:

$a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$ (por la segunda propiedad)

Pero $a^3 : a^5 = \dfrac{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times a} = \dfrac{1}{a^2}$

Luego:

$$\boxed{a^{-2} = \frac{1}{a^2}}$$

Donde:

Todo número elevado a un exponente negativo es igual al inverso de la base elevada al mismo exponente, con el signo cambiado.

Ejemplos:

1) $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ 2) $(a^2)^{-3} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$

3) $2^{-1} = \frac{1}{2}$ 4) $(\frac{-2}{3})^{-2} = (\frac{-3}{2})^2$

5) $(\frac{1}{5})^{-3} = 5^3$

La expresión $0^0$ no tiene significado.

Ejercicios:
Efectuar lo siguiente:

1) $(-1)^3 \times (-1)^{-5}$

2) $(-3)^2 \times (-3) \times (-3)^3 \times (-3)^0$

3) $a^m \times a^n$ con $(a \neq 0)$

4) $[(-2)^{-1}]^5$

5) $[(-15)^0]^8$

6) $[(-2)^3]^4$

7) $[(-3) \times (+2)]^4$

8) $[(+8)^2 \times (-1)^8]^{125}$

9) $[(-8) : (+4)^2]$

10) $[(-1)^2 : (+1)^8]^{125}$

11) $[(7)^2 + (3)^3 + (-1)^8] \times (-2)^2 \times (-3)^0$

12) $(0,2)^2 + (1 - \frac{1}{4})^2 - (1 - 0,2)^2$

13) $[(1 - \frac{2}{3})^2]^5$



14) $[(0,5 - 0,1)^3 - (1 - \frac{1}{5})^2]$

15) $(\frac{-17}{15} + 0,4)^2 \times (-2) - \frac{1}{6} \times (\frac{-2}{3} + \frac{1}{2} - 2)^2$

## 8. LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES COMO OPERACIÓN INVERSA A LA POTENCIACIÓN

1) Como $\left.\begin{array}{l}(-3)^2 = 9 \\ 3^2 = 9\end{array}\right\} \longrightarrow$ $3$ ó $-3$ son números cuyo cuadrado es $9$.
ó

2) Como $\left.\begin{array}{l}(-5)^2 = 25 \\ 5^2 = 25\end{array}\right\} \longrightarrow$ $5$ ó $-5$ son números cuyo cuadrado es $25$.

Pero si tuviéramos:

1) $x^2 = 9\} \longrightarrow$ formularíamos la siguiente pregunta: "¿Cuál o cuáles son los números cuyo cuadrado es 9?"

La pregunta anterior se escribe de la siguiente manera:

$x^2 = 9$ $\quad \sqrt[2]{9}$ ó $\sqrt{9}$

Además, se sabe que $\sqrt{9} = 3$ ó $-3$

Igualmente:

2) $x^2 = 25 \longrightarrow$ "¿Cuál o cuáles son los números cuyo cuadrado es 25?"

Se escribe: $x^2 = 25 \longrightarrow \sqrt[2]{25}$ ó $\sqrt{25}$

Además, se sabe que $\sqrt{25} = 5$ ó $-5$

Esto se lee $\sqrt{9} = \pm 3$; la raíz cuadrada de *9* es *+3 ó –3*.

En $\sqrt[2]{25} = \pm 5$ $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ es el índice; } \sqrt{} \text{ es el radical; } 25 \text{ es el} \\ \text{radicando y } \pm 5 \text{ son las raíces.} \end{array} \right.$

Ejemplos:

1) $x^3 = 8 \longrightarrow \sqrt[3]{8} = 2;\ (2)^3 = 8$
2) $x^3 = -8 \longrightarrow \sqrt[3]{-8} = -2;\ (-2)^3 = -8$
3) $y^4 = 81 \longrightarrow \sqrt[4]{81} = +3;\ (+3)^4 = 81$
4) $w^5 = -32 \longrightarrow \sqrt[5]{-32} = -2;\ (-2)^5 = -32$

Conclusiones:

Cuando el índice de la raíz es par, siempre encontraremos dos raíces simétricas y el problema solo será posible si el radicando es positivo. Por ejemplo, ¿cuál será la raíz de *–16?*

$$\sqrt[2]{-16} = x \quad \text{tal que} \quad x^2 = -16$$

Esta operación es imposible, porque cualquier número $(\neq 0)$ elevado al cuadrado da siempre un resultado positivo, lo cual siempre sucede con los exponentes pares, según las reglas ya vistas de potenciación.

Cuando el índice es impar solo encontraremos una raíz negativa o positiva dependiendo de si el radicando es negativo o positivo.

En este estudio nos basaremos en las raíces cuadradas más frecuentes.



## 8.1 Los cuadrados perfectos

Se llama *cuadrados perfectos* a aquellos que tienen raíz cuadrada exacta. Veamos el siguiente cuadro:

| $A$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt[A]{A}$ | ±1 | ±2 | ±3 | ±4 | ±5 | ±6 | ±7 | ±8 | ±9 |

Son cuadrados perfectos menores que *100*.

Sin embargo, existen números que no presentan raíz cuadrada exacta, como los siguientes:

$$\sqrt{2}, \qquad \sqrt{5}, \qquad \sqrt{7}, \qquad \sqrt{15}, \text{ etcétera}$$

Estos se llaman *números irracionales*.

Todo número irracional tiene infinitas cifras decimales. Las cifras decimales infinitas de un número irracional no son periódicas.

## 8.2 Técnica del cálculo de la raíz cuadrada de los números absolutos

Con el fin de desarrollar los procesos de cálculo de la raíz cuadrada, vamos a limitarnos al conjunto de los números racionales absolutos *(Qa)*.

En este campo, daremos los siguientes cuadrados perfectos menores que *100*.

| CUADRADOS PERFECTOS | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RAÍCES | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

y examinaremos en primer lugar la raíz cuadrada de los números menores que *100* por defecto o por exceso.

Para calcular $\sqrt{40}$, basta encuadrar el número *40* entre los dos cuadrados perfectos del cuadro que sean inmediatamente menor y mayor que *40*.

$$36 < 40 < 49 \quad ó \quad 6 < \sqrt{40} < 7$$

Se define:

$6 = \sqrt{40}$, por defecto, con error menor que la unidad.

$7 = \sqrt{40}$, por exceso, con error menor que la unidad.

Raíz cuadrada de los números mayores que *100*, por defecto, con error menor que la unidad.

Calcular las raíces:

$$\sqrt{3.028} \qquad \sqrt{15.129}$$

## *Primer paso*

Se divide el número dado en clases de dos cifras desde la derecha hacia la izquierda y se separa el radical del lugar destinado a la raíz.



$$\begin{array}{r|l} \sqrt{30.28} & \text{Raíz} \\ \cline{2-2} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{1.51.29} & \text{Raíz} \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

La primera clase puede tener una o dos cifras, como en los ejemplos anteriores.

## *Segundo paso*

Se encuentra el cuadrado perfecto mayor que pueda sustraerse de la primera clase; se efectúa la substracción.

La raíz de ese cuadrado perfecto se coloca en el lugar destinado a la raíz y el doble de esta se coloca bajo la línea destinada a la raíz.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{30.28} & 5 \\ \cline{2-2} -\underline{25}\phantom{.28} & 10 \\ 5\phantom{.28} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{1.51.29} & 1 \\ \cline{2-2} -\underline{1}\phantom{.51.29} & 2 \\ 0\phantom{.51.29} & \end{array}$$

## *Tercer paso*

Se baja el siguiente orden que, con la diferencia anterior, va a formar un nuevo número.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{30.28} & 5 \\ \cline{2-2} -\underline{25}\phantom{.28} & 10 \\ 528 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{1.51.29} & 1 \\ \cline{2-2} -\underline{1}\phantom{.51.29} & 2 \\ 051\phantom{.29} & \end{array}$$

## *Cuarto paso*

Se separa con una coma la última cifra de la derecha en ese nuevo número y se divide lo que quedó a la izquierda de esa coma por el doble de la raíz hasta el momento.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{30.28} & 5 \\ \cline{2-2} -\underline{25} & 10 \\ 52{,}8 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{1.51.29} & 1 \\ \cline{2-2} -\underline{1} & 2 \\ 05{,}1 & \end{array}$$

*(52 : 10 ≅ 5)*   *(5 : 2 ≅ 2)*

### *Quinto paso*

El cociente aproximado que se obtiene (*5* en el primer caso y *2* en el segundo) se coloca en dos lugares a la derecha de la raíz y a la derecha del doble de la raíz.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{30.28} & 55 \\ \cline{2-2} -\underline{25} & 105 \\ 52{,}8 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{1.51.29} & 12 \\ \cline{2-2} -\underline{1} & 22 \\ 05{,}1 & \end{array}$$

### *Sexto paso*

Con el cociente obtenido (*5* en el primer caso y *2* en el segundo) se multiplican los números *105* y *22*, respectivamente. El producto obtenido se sustrae del nuevo número que se obtiene.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{30.28} & 55 \\ \cline{2-2} -\underline{25} & 105 \times 5 = 525 \\ 52{,}8 & \\ \underline{52{,}5} & \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{1.51.29} & 12 \\ \cline{2-2} -\underline{1} & 22 \times 2 = 44 \\ 05{,}1 & \\ -\underline{4\ 4} & \\ 7 & \end{array}$$

En el ejemplo presentado la raíz es *55* y la diferencia *3*. Por lo tanto, $\sqrt{3.028} = 55$; por defecto, menor que la unidad.



En este ejemplo se baja el siguiente orden y se procede tal como se hizo a partir del cuarto paso en adelante.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1.51.29} & 123 \\ \cline{2-2} -\underline{1} & 22 \times 2 = 44 \\ 05{,}1 & 243 \times 3 = 729 \\ -\underline{4\ 4} & \\ 072{,}9 & \\ -\underline{72\ 9} & \\ 0 & \end{array}$$

En el ejemplo de la derecha, obtuvimos una diferencia igual a cero. Por lo tanto, $\sqrt{15.129} = 123$ y el número *15.129* es un cuadrado perfecto.

Este proceso sirve para obtener la raíz cuadrada de cualquier número entero o decimal, como veremos más adelante.

## 8.3 Límite de la diferencia de una raíz cuadrada. Cómo comprobar la raíz cuadrada

La diferencia de una raíz cuadrada no puede ser mayor que el doble de la raíz hallada.

Para comprobar si una raíz cuadrada es correcta, se debe realizar la siguiente verificación:

1) La diferencia no puede ser mayor que el doble de la raíz.
2) El cuadrado de la raíz más la diferencia debe ser igual al radicando.

Por ejemplo:

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{1.53.96}$ | $124$ | *Raíz* $= 124$ |
| $-\underline{1}$ | $22 \times 2 = 44$ | |
| $053$ | $244 \times 4 = 976$ | *Diferencia* $= 20$ |
| $-\underline{44}$ | | |
| $0996$ | | *Verificación:* $(124)^2 + 20 =$ |
| $-\underline{976}$ | | $15.376 + 20 = 15.396.$ |
| $20$ | | |

## 8.4 Raíces cuadradas de las fracciones ordinarias y de los números decimales

Sabemos que $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, entonces $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ (a)

Por otro lado, como

$$\begin{array}{l} 2^2 = 4 \\ 3^2 = 9 \end{array} \ \ldots\ldots: \quad \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \quad (b)$$

Comprobando (a) y (b), vemos lo siguiente:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Este hecho nos permite afirmar lo siguiente:

La raíz cuadrada de una fracción es igual al cociente entre la raíz cuadrada del numerador y la raíz cuadrada del denominador.



Ejemplos:

$$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}\,; \quad \sqrt{\frac{100}{225}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}\,; \quad \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Este último $5/\sqrt{3}$ es una fracción cuyo denominador es irracional. Esta forma no es funcional para el cálculo. Cuando aparece, su denominador debe ser racionalizado. Para ello basta con multiplicar los términos de la fracción por $\sqrt{3}$.

$5/\sqrt{3} = 5 \times \sqrt{3}/\sqrt{3} \ \times \sqrt{3}$, podemos multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por $\sqrt{3}$ puesto que cuando una fracción tiene sus términos multiplicados o divididos por un mismo número, no se altera.

$\sqrt{3} \times \sqrt{3} \quad \sqrt{(3)^2} = 3$ (vemos que las operaciones de extracción de raíces y de potenciación son inversas y por lo tanto se anulan).

Por lo tanto:

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicios:

Racionalizar los denominadores de las siguientes fracciones:

1) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ 2) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ 3) $\frac{a}{\sqrt{b}}$ 4) $\frac{c}{\sqrt{c}}$

Observe ahora las siguientes potencias y raíces:

$(0{,}1)^2 = 0{,}01$; luego $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$

$(0{,}05)^2 = 0{,}0025$; luego $\sqrt{0{,}0025} = 0{,}05$

$(0{,}003)^2 = 0{,}000009$; luego $\sqrt{0{,}000009} = 0{,}003$

de lo cual se deduce lo siguiente:

*La raíz cuadrada de un número decimal tiene la mitad de las cifras decimales del radical.*

1) Calcule $\sqrt{3}$ con un error menor que *0,001*.
En este ejercicio necesitamos una raíz con tres cifras decimales.

Luego el radicando debe tener seis cifras decimales.
Por consiguiente, como *3 = 3,000000*, se tiene lo siguiente:

| | |
|---|---|
| $\sqrt{3.00.00.00}$ | 1,732 |
| − 1 | 27 x 7 = 189 |
| 200 | |
| − 189 | 343 x 3 = 1.029 |
| 0110.0 | 3.462 x 2 = 6.924 |
| − 102 9 | Raíz: 1,732 |
| 007 100 | |
| − 6.924 | Comprobación: $(1.732)^2$ + 176 = 2.999.824 |
| 0 176 | + 176 = 3.000.000 |

En la práctica, se ignoran las cifras decimales de *3,000000* y al resultado se le atribuye la mitad de cifras decimales del radical.



2) Calcule $\sqrt{19{,}3}$ con un error menor que *0,01*. Debemos aumentar tres ceros al radical, puesto que con cuatro cifras decimales tendremos la raíz aproximada con un error de 0,01. Así, escribimos *19,3 = 19,3000*. Se debe ignorar la coma y atribuir al resultado dos cifras decimales.

| | |
|---|---|
| $\sqrt{19.30.00}$ | 439 |
| − 16 | 83 x 3 = 249 |
| 0330 | 869 x 9 = 7.821 |
| − 249 | |
| 0810.0 | Raíz: 4,39 |
| − 782 1 | |
| 0279 | Comprobación: $(439)^2$ + 279 = 193.000 |

Ejercicios:

1) Calcule la raíz cuadrada exacta de los siguientes cuadrados perfectos:

a) *6.084* b) *33.856* c) *110.889*
d) *714.025* e) *866.761* f) *1.752.976*
g) *1.030.225* h) *11.025* i) *1.234.321*

2) Extraiga la raíz cuadrada aproximada por defecto, según lo requiera cada uno de los siguientes ejercicios:

a) *36,14 (con un error menor que 0,01)*
b) *16796,2 (con un error menor que 0,1)*
c) *1234589 (con un error menor que 0,1)*
d) *0,811902 (con un error menor que 0,001)*

e) *4,0562 (con un error menor que 0,001)*
f) *167,036 (con un error menor que 0,01)*
g) *0,00781 (con un error menor que 0,001)*

# 9. SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

## 9.1 Unidades de longitud

Medir quiere decir comparar; medir una longitud determinada significa compararla con otra tomada como unidad de medida. Para que exista uniformidad, se estableció un sistema universal de medida que es el Sistema Métrico Decimal; este sistema se basa en el metro lineal.

*Definición*: se llama *metro lineal* a la longitud equivalente a la fracción 1/10.000.000 de la distancia que va de un polo hasta la línea ecuatorial medida sobre un meridiano. Dicha longitud calculada se encuentra señalada sobre una barra de metal noble (platino e iridio) que está custodiado en el Museo Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres (Francia).

### *Múltiplos y submúltiplos del metro lineal*

Los múltiplos y submúltiplos del sistema métrico decimal tienen nombres que están formados con los siguientes prefijos de origen griego:

kilo- que significa 'mil veces'
hecto- " " 'cien veces'
deca- " " 'diez veces'
deci- " " 'décima parte (1/10)'



centi- que significa 'centésima parte (1/100)'
mili- " " 'milésima parte (1/1.000)'

Es así que tenemos el siguiente cuadro:

| MÚLTIPLOS | | | UNIDAD | SUBMÚLTIPLOS | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kiló-metro | Hectó-metro | Decá-metro | Metro | Decí-metro | Centí-metro | Milí-metro |
| (km) | (hm) | (dam) | (m) | (dm) | (cm) | (mm) |
| 1.000 m | 100 m | 10 m | 1 m | 0,1 m | 0,01 m | 0,001 m |

Ejemplos:

1) 4,52 km se lee de una de las siguientes formas: "4 kilómetros y 52 centésimos de kilómetros" o "4 kilómetros y 52 decámetros";

2) 123,425 m se lee "123 metros y 425 milésimos de metro" o "123 metros y 425 milímetros".

### *Transformación de unidades*

Los cambios de unidades en el sistema lineal de medidas (medidas de extensión) se basan en el siguiente hecho:

> *Cada unidad de extensión es 10 veces mayor que la unidad inmediatamente inferior.*

Ejemplos:

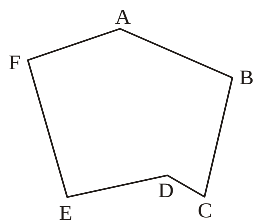
1) *0,02 hm en metros*
   $0{,}02\ hm = (0{,}02 \times 100)\ m = 2\ m$

2) *54,36 dm en dam*
   $54{,}36\ dm = (54{,}36 : 100)\ dam = 0{,}5436\ dam$

En la práctica, cada vez que se cambia la coma hacia la derecha, la unidad se transforma en la unidad inmediatamente inferior y cuando la coma se cambia hacia la izquierda (o se divide entre 10), la unidad se transforma en la inmediatamente superior.

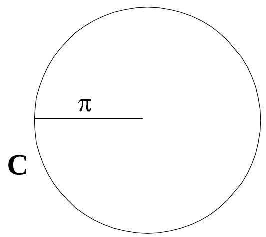
## *Perímetro de un polígono*

El perímetro de un polígono es la suma de las medidas de sus lados.




El perímetro del polígono de al lado será:

$P = AB + BC + CD + DE + EF + FA.$




El cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es constante y vale 3,14. Llamamos $C$ a la longitud de la circunferencia y $2r$ a su diámetro (dos radios). Se representa de la siguiente manera:

$C/2r = 3{,}14$, entonces $C = 2 \times 3{,}14 \times r$.



Por lo general, se representa el número 3,14 mediante la letra π (pi) del alfabeto griego; entonces, la fórmula para obtener el perímetro de la circunferencia es la siguiente:

$$C = 2 \times \pi \times r$$

Ejercicios:

Expresar en metros:

| | | |
|---|---|---|
| 1) *0,005 hm* | 2) *1,2 km* | 3) *134,2 dm* |
| 4) $\frac{3}{4}$ *hm* | 5) $1\frac{1}{4}$ *dm* | 6) $\frac{5}{6}$ *km* |
| 7) $3\frac{3}{8}$ *hm* | 8) $4\frac{1}{6}$ *cm* | |

Expresar en dm los siguientes resultados:

1) $2{,}5\ m + (5{,}4\ hm - 48\ dam)$
2) $5{,}28\ dm + [85\ dam - (4{,}5\ km - 42\ hm)]$
3) $4{,}2\ km - [(65\ dm + 8{,}5\ m) + (25\ dam - 240\ m)]$
4) $120\ hm - [10\ dam - (120\ m - 1.120\ dam)]$
5) $0{,}08\ hm + [0{,}05\ km + (120\ hm - 11{,}2\ km)]$
6) Calcular el perímetro de un polígono de 5 lados, en el cual el lado menor vale 4 dm y los otros son números consecutivos a este.
7) Determinar el perímetro de un rectángulo en el cual uno de los lados vale 12 cm y el otro 5/4 del primero.
8) Si se tiene un triángulo isósceles (que tiene dos lados iguales), cuya suma de la base (lado desigual) con uno de los lados es 28 cm, calcule el perímetro si se toma en cuenta que el lado es el triple de la base.

9) La longitud de una circunferencia es 18,84 cm. Calcule su radio.

## 9.2 Unidades de área

### *Superficie de área*

Tenemos una idea de lo que es una superficie. Parece ser un concepto intuitivo porque lo conocemos sin necesidad de definirlo. La superficie de la mesa, la de la tarima, etcétera, son superficies planas. La superficie de una pelota de fútbol es esférica.

Se llama *área* al número que mide una superficie en una determinada unidad.

La unidad usada para medir la superficie es el metro cuadrado. Se llama *metro cuadrado* al cuadrado que tiene un metro de lado.

Toda unidad de medida de superficie es 100 veces mayor que la unidad inmediatamente inferior.

**MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DEL METRO CUADRADO**

| MÚLTIPLOS | | | UNIDAD | SUBMÚLTIPLOS | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kilómetro cuadrado | Hectómetro cuadrado | Decámetro cuadrado | Metro cuadrado | Milímetro cuadrado | Centímetro cuadrado | Milímetro cuadrado |
| $km^2$ | $hm^2$ | $dam^2$ | $m^2$ | $dm^2$ | $cm^2$ | $mm^2$ |
| 1.000.000 $m^2$ | 10.000 $m^2$ | 100 $m^2$ | 1 $m^2$ | 0,01 $m^2$ | 0,0001 $m^2$ | 0,000001 $m^2$ |



### *Transformación de las unidades*

1) Para convertir un número medido en determinada unidad a la unidad inmediatamente inferior, se lo debe multiplicar por 100 (y mover la coma a la derecha en dos cifras decimales).

2) Para convertir un número medido en la unidad inmediatamente superior, se lo debe dividir entre 100 (y mover la coma a la izquierda en dos cifras decimales).

### *Unidades agrarias*

La medición de tierras se realiza mediante unidades especiales denominadas *unidades agrarias*.

La unidad fundamental es el área (are).

Se llama *área* al cuadrado que tiene diez metros de lado.

Las unidades agrarias se resumen en el siguiente cuadro.

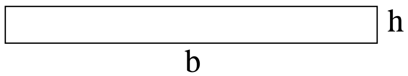
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| hectárea | – | ha | – | 100 a | ó | 10.000 $m^2$ |
| área | – | are | – | 1 a | ó | 100 $m^2$ |
| centiárea | – | ca | – | 0,01 a | ó | 1 $m^2$ |

## *Áreas planas*

Estudiaremos a continuación las principales áreas planas.

1) El área del rectángulo es igual al producto de la base por la altura.

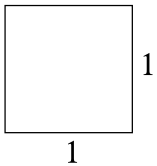
$$S = base\ (b) \times altura\ (h)$$




**Área del cuadrado**

El área del cuadrado es igual al cuadrado del lado.

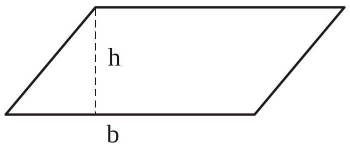
$$S = lado^2\ (1^2)$$




**Área del paralelogramo**

El área del paralelogramo es igual al producto de la base por la altura.

$$S = b \times h$$

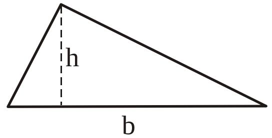



**Área del triángulo**

El área del triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura.

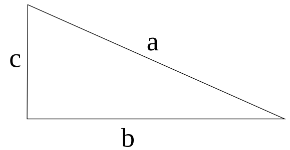


$$S = \frac{b \times h}{2}$$




*Caso particular*. Si el triángulo es rectángulo, sus lados tienen nombres propios, según lo señalado. Los lados que forman el ángulo recto son catetos y el tercer lado se llama *hipotenusa*. Los catetos son, indiferentemente, la base y la altura del triángulo.

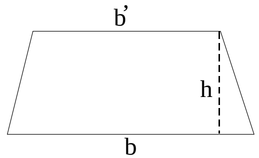
$$S = \frac{b \times c}{2}$$




**Área del trapecio**

El área del trapecio es igual al producto de la semisuma de las bases por la altura.

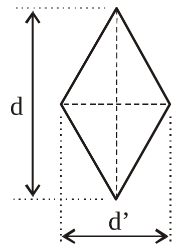
$$S = \frac{(b + b') \times h}{2}$$




**Área del rombo**

El área del rombo es igual al semiproducto de sus diagonales.

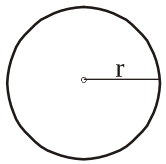
$$S = \frac{d \times d'}{2}$$



**Área del círculo**

El área del círculo es igual al producto del número *3,14* por el cuadrado del radio.

$$S = \pi r^2$$
$$\pi = 3,14$$




Ejercicios:

Calcular en metros cuadrados las siguientes dimensiones:

1) $\frac{5}{4}\ dam^2$ 2) $1\frac{1}{4}\ dam^2$

3) $(1\frac{1}{3} + 0,2)\ mm^2$ 4) $(0,2 + 1\frac{1}{4})\ dm^2$

5) $\frac{3}{5}\ cm^2$ 6) $(2\frac{1}{3} + 0,2)\ km^2$

7) $(0,125 + \frac{1}{4})\ km^2$ 8) $(0,25 + 1\frac{1}{4})\ km^2$

Efectúe las siguientes operaciones en $dm^2$:

9) $2,25\ km^2 - (80\ hm^2 - 120\ dm^2)$

10) $0,4\ hm^2 - [5,2\ dam^2 - (8,6\ m^2 - 120\ dm^2)]$

11) $54,5\ dm^2 - [0,04\ m^2 - (12\ dm^2 - 1.100\ cm^2)]$



12) $(2,4\ dam^2 + 120\ dm^2) - (540\ cm^2 + 2,8\ m^2)$

13) El perímetro de un rectángulo es 48 cm y la base es el triple de la altura; determine el área de dicho rectángulo.

14) El perímetro de un cuadrado mide 96 dm. Calcule el área.

15) Calcule el área del rombo cuyas diagonales suman 30 cm, si se sabe que una es el doble de la otra.

16) Calcule el área de un trapecio en el que las bases miden 8 m y 10 m, y la altura es 2/5 de la base mayor.

17) Calcule el área del círculo si se sabe que la longitud es 18,84 dm.

18) La suma de la base y de la altura de un triángulo es 72 cm. Calcule el área del triángulo si se sabe que la base es el doble de la altura.

## 9.3 Unidades de volumen y de capacidad

### *Unidades de volumen*

La unidad fundamental para medidas de volumen es el metro cúbico. Se llama *metro cúbico* al volumen de un cubo cuya arista mide un metro.

Cada unidad de volumen es 1.000 veces mayor que la unidad inmediatamente inferior.

| Múltiplos | | | Unidad | Submúltiplos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kilómetro cúbico | Hectómetro cúbico | Decámetro cúbico | Metro cúbico | Decámetro cúbico | Centímetro cúbico | Milímetro cúbico |
| $km^3$ | $hm^3$ | $dam^3$ | $m^3$ | $dm^3$ | $cm^3$ | $mm^3$ |
| 1.000.000.000 $m^3$ | 1.000.000 $m^3$ | 1.000 $m^3$ | 1 $m^3$ | 0,001 $m^3$ | 0,000001 $m^3$ | 0,000000001 $m^3$ |

## *Volumen de los principales sólidos geométricos*

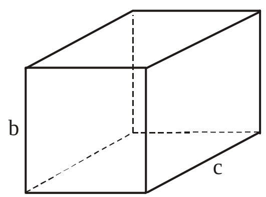
En los sólidos, los largos, anchos y alturas se conocen como *aristas*.

**Volumen del paralelepípedo rectángulo**

El volumen de un paralelepípedo rectángulo es el producto de sus tres dimensiones.

h

$$V = a \times b \times c$$
$$a = largo$$
$$b = altura$$
$$c = profundidad$$



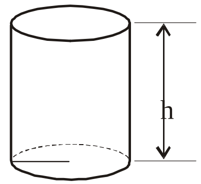

**Volumen del cubo**

Como el cubo es un paralelepípedo rectángulo de aristas iguales, llamamos a esa arista *a* y se tiene:

$$V = a \times a \times a$$
$$V = a^3$$

El volumen del cubo equivale a su arista al cubo.

**Volumen del cilindro**




$$V = \pi \ r^2 \ h$$

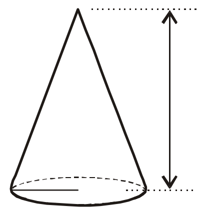
siendo $\pi r^2$ el área de la base del cilindro, y *h* la altura.

**Volumen del cono**

El volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro que tiene la misma base y la misma altura del cono.

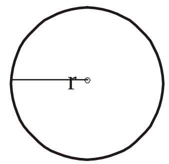
r

Por lo tanto: $V = \frac{1}{3} \pi \ r^2 \ h$



**Volumen de la esfera**

$$V = \frac{4}{3} \pi \ r3$$




Ejercicios:

Escriba las siguientes medidas en metros cúbicos:

1) $0,005 \ km^3$ 2) $4,1 \ hm^3$

3) $\frac{3}{2}$ *de* $hm^3$ 4) $1 \frac{1}{4}$ *de* $dam^3$

5) $(1\frac{1}{8} + 0,5)\ dm^3$ 6) $(4\frac{1}{4} + 0,5)\ cm^3$

7) $(2\frac{1}{3} + 0,2)\ hm^2$ 8) $(3\frac{1}{2} + 0,2)\ km^3$

9) Calcular el volumen del cono en el que la suma del radio de la base y la altura es 36 cm, si se sabe que la altura es el triple del radio.

10) Calcular el volumen de un cilindro en el que el radio de la base vale 3 m y la altura es 10 m.

11) Un cubo de 0,80 m de arista está lleno de agua hasta sus 3/4. ¿Cuántos $m^3$ de agua contiene?

12) Determinar cuál es el volumen de una caja de agua que tiene forma de paralelepípedo, cuyas aristas miden 0,60 m por 0,40 m x 1 m.

## *Unidades de capacidad*

La unidad fundamental para medir la capacidad es el litro, que se abrevia L. Definición:

El litro es el volumen equivalente a un decímetro cúbico.

**MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DEL LITRO**

| MÚLTIPLOS | | | UNIDAD | SUBMÚLTIPLOS | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kilolitro | Hectolitro | Decalitro | Litro | Decilitro | Centilitro | Mililitro |
| (kL)<br>1.000 L | (hL)<br>100 L | (daL)<br>10 L | (L)<br>L | (dL)<br>0,1 L | (cL)<br>0,01 L | (mL)<br>0,001 L |



Definición:

*1 L = 1 dm³*

| Entonces: | *1 hectolitro* | = | *100 L* | = | *100 $dm^3$* |
|---|---|---|---|---|---|
| | *1 litro* | = | *1 L* | = | *1 $dm^3$* |
| | *1 mililitro* | = | *0,001 L* | = | *0,001 $dm^3$* |

Ejercicios:

Convierta:

1) *1,4 hL en L*
2) *4.385 mL en dL*
3) *22,5 $m^3$ en L*
4) *58.450 dL en $dam^3$*
5) Calcular a cuántos hectolitros corresponde el volumen de 152,4 $cm^3$.
6) Diga cuántos $cm^3$ contienen 1.253 dL.
7) Una industria farmacéutica importa 10 frascos de vacunas contra la polio de 5 L cada uno. Si quiere revender la vacuna en frascos de 20 $cm^3$, ¿cuántos frascos tendrá para vender?

# 10. RAZONES

Se llama *razón de dos dimensiones del mismo tipo* al cociente que indica los números que miden dichas dimensiones en una misma unidad; por ejemplo, la dimensión entre las medidas de la puerta y de la pared de la sala del aula. Si el ancho de la puerta es de un metro y la medida de la longitud de la pared de 6 m, la razón entre estas medidas será 1/6, que se lee: “uno es a seis”.

Si se tiene la razón a/b también podemos escribirla de la siguiente forma: *a : b* y se lee "a es a b".

Los términos *a* y *b* de la razón se llaman *antecedente* y *consecuente,* respectivamente.

$a \longrightarrow$ *antecedente*
$b \longrightarrow$ *consecuente*

Las razones *a : b* y *b : a* se llaman *inversas*.

Por ejemplo,

*1 : 4 y 4 : 1 son inversas.*

Se deduce lo siguiente:

*Dos razones son inversas cuando el antecedente de una es igual al consecuente de la otra.*

## 10.1 Propiedad fundamental de las razones

Si se multiplican o dividen los términos de una razón por un mismo número diferente de cero, se obtiene una razón equivalente a la razón dada.

Ejemplo:

Obtenga razones equivalentes a la razón $\frac{6}{8}$

$$\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4} \qquad \frac{6}{8} = \frac{6 \times 3}{8 \times 3} = \frac{18}{24}$$



Ejercicios:

Determine los valores de las siguientes razones:

1) $(1 + \frac{1}{3}) : 0,4$

2) $[(\frac{9}{2})^2 \times \frac{1}{4}] : (3 - \frac{1}{8})$

3) $(a + \frac{1}{2}) : (a - \frac{1}{2})$

Determine el antecedente de las siguientes razones, si se sabe que:

4) el consecuente es *5* y la razón vale $\frac{3}{2}$

5) el consecuente es $(2 - 1\frac{1}{4})$ y la razón es $(4 + \frac{2}{3})$

## 11. PROPORCIONES

Se llama *proporción* a la expresión de igualdad de *dos* razones.

Por ejemplo:

$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ es una proporción que se lee:

"1 es a 2 como 5 es a 10", y se escribe del siguiente modo:

*1 : 2 :: 5 : 10*, donde *1* y *10* son los extremos y *2* y *5* los medios.

## 11.1 Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$Si \quad \frac{1}{2} = \frac{5}{10} \quad entonces \quad 1 \times 10 = 2 \times 5$$

Ejercicios:

Verifique si las siguientes igualdades, escritas en forma de proporción, son verdaderas o falsas.

1) $5 : \frac{1}{2} :: \frac{5}{3} : \frac{5}{30}$

2) $\frac{11}{8} : (2 + \frac{3}{4}) :: (3 - \frac{1}{2}) : 5$

3) $(5 - \frac{1}{2}) : (2 + \frac{1}{4}) :: \frac{3}{4} : \frac{3}{8}$

Calcule el valor de $x$ en las siguientes proporciones:

4) $\frac{2}{3} = \frac{x}{6}$

5) $\frac{9}{x} = \frac{3}{5}$

6) $(4 + \frac{1}{2}) : (2 + \frac{1}{4}) = x : \frac{3}{8}$

7) $1\frac{3}{8} : (3 - \frac{1}{4}) = (3 - \frac{1}{2}) : x$



8) $\frac{4 + x}{3} = \frac{5x}{9}$

9) $\frac{16}{7} = \frac{36}{x + 9}$

10) $\frac{3x - 1}{2} = \frac{x - 3}{5}$

## 11.2 Propiedades generales de las proporciones

Dada la siguiente proporción: $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$

tenemos:

1) $\begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \\ ó \\ \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \\ \\ \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \end{cases}$

3) $\left\{ \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right.$

4) $\left\{ \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right.$

5) $\frac{a \times c}{b \times d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$

6) $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$

7) $\frac{a : c}{b : d} = 1$

8) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}$

## 11.3 Sucesiones de números proporcionales

### *Sucesiones de números directamente proporcionales*

Dos sucesiones a, *b, c, d…* y *a', b', c', d'…* son directamente proporcionales cuando la razón entre cualquier elemento de la primera sucesión y su correspondiente en la segunda es una constante K.

Ejemplos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 5 | 7 | 11 | 12 |
| 2) | 10 | 14 | 22 | 24 |

donde: $\frac{5}{10} = \frac{7}{14} = \frac{11}{22} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = K$

Son sucesiones de números directamente proporcionales y el coeficiente de proporcionalidad es 1/2.

### *Sucesiones de números inversamente proporcionales*

Dos sucesiones *a, b, c, d…* y *a', b', c', d'…* son inversamente proporcionales cuando el producto entre cualquier elemento de la primera sucesión y su correspondiente en la segunda es siempre una constante K.

1) $\begin{matrix} 4 & 2 & 1 & 10 \\ 5 & 10 & 20 & 2 \end{matrix}$

donde $4 \times 5 = 2 \times 10 = 1 \times 20 = 10 \times 2 = K.$

20 es el coeficiente de proporcionalidad inversa entre las sucesiones dadas.



La sucesión (1) también es directamente proporcional a:

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{2}$$

Si verificamos esto con la definición de sucesión de números directamente proporcionales, tenemos lo siguiente:

$$\frac{4}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{1}{20}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20 = K$$

Este punto es muy importante para resolver los problemas que veremos a continuación.

Ejercicio:

Determine los valores de las incógnitas presentes en las siguientes sucesiones directamente proporcionales:

1) $\begin{bmatrix} 4 & x & y \\ \frac{1}{2} & 4 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 10 \\ z & y & x & 25 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 & 42 & 69 \\ x & 5 & y & z & w \end{bmatrix}$

Determine los valores de las incógnitas en las siguientes sucesiones inversamente proporcionales:

4) $\begin{bmatrix} x & 12 & 72 & z \\ 4 & y & 2 & 16 \end{bmatrix}$ 5) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 10 \\ w & z & y & 4 \end{bmatrix}$

6) Divida *490* en partes proporcionales a *1, 12, 23* y *34*.

7) Divida el número *9.954* en partes directamente proporcionales a los números *1, 3/7* y *7/3*.

8) Divida el número *234* en partes inversamente proporcionales a las cifras *2, 3* y *4*.

9) Divida el número *9.954* en partes inversamente proporcionales a *1, 3/7* y *7/3*.

## 11.4 Dimensiones proporcionales

### *Dimensiones directamente proporcionales*

Dos dimensiones son directamente proporcionales cuando, al aumentar una de ellas, la otra aumenta en la misma razón que la primera.

### *Dimensiones inversamente proporcionales*

Dos dimensiones son inversamente proporcionales cuando, al aumentar una de ellas, la otra disminuye en la misma razón que la primera.

## 11.5 Regla de tres simple

Veamos, como ejemplos, los siguientes problemas:

1) Compré 50 m de alambre y pagué \$2,50. Si quisiera comprar 120 m, ¿cuánto tendría que pagar?



Solución por el método de las proporciones:

Si esquematizamos el problema y colocamos en una misma columna las dimensiones del mismo género y en una línea las dimensiones de géneros diferentes que se corresponden en el problema, tenemos:

| *Alambre* | *Precio* |
|---|---|
| ↓ 50 m | ↓ \$2,50 |
| 120 m | x |

Se colocan las dos flechas en el mismo sentido para indicar que al aumento del alambre le corresponde un aumento del precio del alambre. Son dimensiones directamente proporcionales.

Escribimos entonces la siguiente proporción:

$$\frac{50}{120} = \frac{2{,}50}{x} \qquad x = \frac{120 \times 2{,}50}{50} = \$6{,}00$$

Por lo tanto, 120 m de alambre cuestan \$6.00.

Decimos que la regla de tres es directa porque implica dimensiones directamente proporcionales.

2) Con una velocidad media de 50 km/h, un auto recorre la distancia entre dos ciudades en 6 horas y 30 minutos. Si mantuviera una velocidad media de 60 km/h, ¿en cuánto tiempo recorrería el mismo trayecto?

| **Velocidad** | **Tiempo** |
|---|---|
| ↓ 50 km/h | ↑ 6 horas 30 minutos |
| 60 km/h | x |

Las flechas tienen sentidos opuestos porque la regla de tres es inversa. En efecto, si la velocidad aumenta, el tiempo disminuye. En este caso, invertimos los valores de una de las dimensiones para que las flechas queden en el mismo sentido y entonces podemos colocar la proporción.

Luego: $\dfrac{50}{60} = \dfrac{x}{6{,}30\ h}$

como 6 horas y 30 minutos = 390 minutos, obtenemos la respuesta en minutos efectuando la siguiente operación:

$$\frac{50}{60} = \frac{x}{390} \quad x = \frac{50 \cdot 390}{60} = 325 \text{ minutos}$$

## 11.6 Regla de tres compuesta

Consideremos el siguiente problema:

18 telares tejen 360 metros de paño en 10 días. ¿Cuántos días se necesitarán para tejer 480 metros de paño usando 30 telares?

Podemos abreviar el problema, al hacer las siguientes modificaciones:

a) Colocar en la primera línea los elementos del problema.

b) En la segunda línea, los elementos relacionados con la incógnita.

c) En la misma columna, las dimensiones del mismo género.

| Telares | Metros de paño | Días |
|---|---|---|
| ↑ 18 | ↓ 360 | ↓ 10 |
| 30 | 480 | x |



Al relacionar por separado la dimensión de la incógnita con cada dimensión del problema, notamos si son directa o inversamente proporcionales; entonces, colocamos flechas en el mismo sentido para el primer caso y con sentido diferente para el segundo.

Se usa la siguiente regla práctica:

Invertimos el orden de las líneas cuyas flechas tienen sentido contrario a la dimensión de la incógnita:

$$\begin{array}{lllllll} 30 & \text{———} & 360 & \times & 10 & \rightarrow \\ 18 & \text{———} & 480 & & x & \rightarrow \end{array}$$

Se obtiene el valor de $x$ mediante la siguiente razón:

$$x = \frac{18 \cdot 480 \cdot 10}{30 \cdot 360} = 8 \text{ días}$$

Verificación:

| Telares | Metros de paño | Días |
|---|---|---|
| ↑ 18 | ↓ 360 | ↓ 10 |
| 30 | 480 | x |

Si *18/30* es inversamente proporcional a *10/x*, entonces *30/18* es directamente proporcional a *10/x*. Como *360/480* también es directamente proporcional a *10/x,* la razón formada por el producto *30 · 360/18 · 480* también es directamente proporcional a *10/x*. O sea:

$$\frac{30 \cdot 360}{18 \cdot 480} = \frac{10}{x} \therefore x = \frac{18 \cdot 480 \cdot 10}{30 \cdot 360} = 8 \text{ días}$$

1) Para purificar 50.000 m$^3$ de agua se consumieron 2.250 kg de sulfato de aluminio. ¿Cuántos kg de sulfato de aluminio se utilizarán para tratar 2.575.000 m$^3$ de agua?

2) Un decantador se llena en 6 horas y 30 minutos con un caudal de 42 L/seg. ¿Cuántos L/seg se necesitarán para llenar el mismo decantador en 5 horas y 15 minutos?

3) Un operario lleva 29 días trabajando en promedio 5 horas y 30 minutos por día para lavar, escobillar y pintar con un desinfectante los decantadores de una planta de tratamiento de agua. ¿Cuánto tardaría en realizar el servicio si trabajara 7 horas y 15 minutos por día?

4) 18 litros de aceite pesan 14,4 kg. ¿Cuál es el volumen en cm$^3$ de 1,2 kg del mismo aceite?

5) Un decímetro cúbico de mercurio (metal líquido) pesa aproximadamente 13,6 kg. ¿Cuánto pesan 35 cL del mismo mercurio?

6) 50 sacos de carbón activo, de 36 kg cada uno, se mezclan en 120 sacos de sulfato de aluminio, de 60 kg cada uno, para producir sulfato negro. ¿Cuántos sacos de sulfato de aluminio, de 60 kg, se necesitarán para producir sulfato negro de la misma clase si se usan 100 sacos de carbón de 50 kg cada uno?



7) En unos cilindros de cloro existen impurezas en una razón de 6:1.000. ¿Qué cantidad útil del gas habrá en cilindros de 250 litros?

8) La cantidad de sulfato de aluminio que existe en una planta de tratamiento de agua es suficiente para tratar 3.000 m$^3$/día durante 40 días. ¿Cuántos días duraría la mitad almacenada si tratara solo 2.000 m$^3$/día?

9) El revestimiento de un muro de 16 m de dimensión y 2,5 m de altura consume 84 kg de revoque preparado. ¿Cuántos kg se necesitarán para revestir otro muro de 30 m de dimensión y 1,8 m de altura?

10) La caja dosificadora de cal entrega 120 litros de solución en 15 horas de funcionamiento si los recipientes giran con una rotación de 12 giros por minuto. ¿Qué cantidad de solución dosificará en 4 horas si la rotación aumentara a 15 giros por minuto?

11) Una máquina tiene capacidad para asfaltar 160 m de pista de carretera con 12 m de ancho en 4 días. ¿Cuántos días y fracciones de día se necesitarán para asfaltar, en igualdad de condiciones, 800 m de pista de 16 m de ancho?

12) Invertí en un negocio $12.000,00 durante 6 meses y obtuve una renta de $1.800,00. ¿Cuál sería mi renta si invirtiera en el mismo negocio $180.000,00 durante 4 meses?

## 11.7 Porcentaje

### *Tasas centesimal y milesimal*

Consideremos los siguientes ejemplos:

1) Un vendedor gana 5 dólares por cada 100 dólares vendidos.

Decimos que gana una comisión en la razón 5/100, ó 5 : 100 y representamos esa ganancia como el 5%.

2) En mi escuela, de cada 100 alumnos, 60 son niños. Decimos que los niños prevalecen en la razón de 60/100, ó 60 : 100 y representamos ese predominio como el 60%.

3) En mi ciudad, de cada 1.000 habitantes, 25 son extranjeros Decimos que los extranjeros residentes en mi ciudad están en razón de 25/1.000, ó 25:1.000 y representamos esa proporción como el 25‰.

5% y 60% son tasas centesimales.

25‰ es una tasa milesimal.

La tasa centesimal relaciona un acontecimiento o evento con el número 100; la milesimal vincula un acontecimiento con el número 1.000.

Los números 100 y 1.000 son referencias fijas y tradicionales. La razón también puede representarse de otra manera.



Por ejemplo:

1) La comisión del vendedor está en la razón 1/20 de la venta.

En efecto: $1/20 = x/100 \longrightarrow x = 5$. *Y, por lo tanto, 1/20* equivale a 5/100 ó a 5%.

2) En mi escuela, los niños son 3/5 del total. En efecto;

$$\frac{3}{5} = \frac{y}{100} \longrightarrow y = 60\%.$$

Luego: $\frac{3}{5} \longrightarrow \frac{60}{100}$ *ó 60%.*

3) Los extranjeros residentes en la ciudad en que yo vivo están en razón de 1/40 con respecto a los habitantes.

En efecto: $\frac{1}{40} = \frac{z}{1.000} \longrightarrow z = 25$

Luego: $\frac{1}{40} \longrightarrow \frac{25}{1000}$ *ó 25‰*

La expresión *parte por millón* obedece a un razonamiento análogo y relaciona un acontecimiento con el número 1.000.000.

## *Principal y porcentaje*

Reflexionemos sobre el siguiente problema:

¿Qué comisión le corresponde al vendedor que vende $1.200,00 si la tasa de comisión es el 5%?

Analicemos el problema:

La tasa es 5% ó 5/100.

La cantidad principal del problema es $1.200,00.

La comisión del vendedor es su porcentaje.

Podemos representar estas cantidades de la siguiente manera:

| | |
|---|---|
| Tasa centesimal | = i% |
| Principal | = C |
| Porcentaje | = p |

Con esta representación, se sabe lo siguiente:

Si la tasa fuera de 1%, el vendedor ganaría $1,00 por cada $100,00 vendidos. Es un problema de regla de tres compuesta que puede esquematizarse de la siguiente manera:

| **Principal** | **Tasa** | **Porcentaje** |
|---|---|---|
| $100,000 | 1% | $1,00 |
| C | i% | p |



Estamos ante una regla compuesta directa puesto que si aumenta el principal, crece el porcentaje, y si la tasa se incrementa, también lo hace el porcentaje. Luego:

$$\begin{array}{lll} 100 \;\rule[0.5ex]{4em}{0.4pt} & 1 & 1 \longrightarrow \\ C \;\rule[0.5ex]{4em}{0.4pt} & i & p \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 100 & 1 & 1 \\ C & i & p \end{array}$$

$$\boxed{p = \frac{C \times i}{100}}$$

En el siguiente problema tenemos:

$$C = \$1.200,00; \qquad i = 5\ \% \qquad p = ?$$

$$p = \frac{\$1.200.00 \times 5}{100} = 60,00 \qquad p = 60,00$$

Con la misma fórmula es posible conocer *C* e *i*.

Si la tasa fuera milesimal, la fórmula sería la siguiente:

$$\boxed{P = \frac{C \times i}{1.000}}$$

La forma ha sido deducida mediante un razonamiento análogo al caso anterior. Cuando la tasa es milesimal, se utiliza *P* mayúscula.

Ejercicios:

Determine el porcentaje cuando se da lo siguiente:

1) $C = 1.000$ $i = 6\%$
2) $C = 90$ $i = 12\%$
3) $C = 2.400$ $i = 12\%$

Determine la tasa de porcentaje para los siguientes datos:

1) $C = 5.400$ $P = 180$
2) $C = 800$ $P = 24$
3) $C = 12.810$ $P = 36$

Determine el principal cuando se da lo siguiente:

1) $P = 2.520$ $i = 12\%$
2) $P = 6{,}5$ $i = 1{,}3\%$
3) $P = 120$ $i = 5\%$
4) $P = 144$ $i = 2{,}4\%$

## 12. NOCIONES DE LOGARITMO

Dados dos números $a$ y $b$ positivos, con $a \neq 1$, se llama logaritmo del numero $b$ en la base $a$ al número $x$ tal que: $a^x = b$

Esto se escribe del siguiente modo: $\log_a b = x$

Y significa: $a^x = b$

Veremos que toda ecuación del tipo $\log_a b = x$ corresponde a un exponencial equivalente, o sea $a^x = b$ cuya equivalencia indicaremos con: $\log_a b = x \rightleftarrows a^x = b$



Ejemplos

1) ¿Cuál es el logaritmo de *16* en la base *2*?

$\log_2 16 = x \rightleftarrows 2^x = 16$

o bien

$2^x = 2^4$ $\boxed{x = 4}$

Esto quiere decir que si las bases son iguales, los exponentes también deberán serlo para que la igualdad sea verdadera.

2) ¿Cuál es el logaritmo de *1* en la base *a*?

$\log_a 1 = x \rightleftarrows a^x = 1$

$Si\ a^x = a^o \longrightarrow x = 0$

3) ¿Cuál es el logaritmo de $a^n$ en la base *a*?

$\log_a a^n = x \rightleftarrows a^x = a^n$ $\boxed{x = n}$

4) ¿Cuál es el logaritmo de *a* en la base *a*?

$\log_a a = x \rightleftarrows a^x = a$

$a^x = a^1 \longrightarrow$ $\boxed{x = 1}$

Vemos que los siguientes símbolos no tienen significado:

1) $\log_1 b$ 2) $\log_a 0$ 3) $\log_a (-b)$

En efecto:

1) $log_1\ b = x \rightleftarrows 1^x = b\ (?)$

porque $1^x = 1$ cualquiera que sea $x$.

2) $log_a\ 0 = x \qquad a^x = 0\ (?)$

para cualquier $x$, el valor $a^x$ nunca se anula.

3) $log_a\ (-b) = x\ a^x = -b\ (?)$

Como la base $a$ es mayor que cero, cualquier potencia de un número positivo da un resultado siempre positivo; de lo cual se deduce que no existe logaritmo de un número negativo.

Ejemplos

1) Determine cuál es la base del sistema de logaritmos donde el logaritmo de $7$ es $1/4$.

$log_a\ 7 = 1/4$ equivale al exponencial $a^{¼} = 7$ si se elevan los miembros a la cuarta potencia; se tiene:

$( a^{¼} )^4 = 7^4 \qquad a = 7^4 \rightleftarrows \boxed{a = 2.401}$

2) ¿Cuál es el número cuyo logaritmo en la base $3$ es igual a $4$?

$log_3\ y = 4$ ó $3^4 = y$ ó $\boxed{y = 81}$

3) Determine el número cuyo logaritmo en el sistema de base $\sqrt[3]{9}$ equivalga a $0,75$.

$log\ ^3\sqrt{9}\ x = 0,75 \rightleftarrows (\sqrt[3]{9})^{0,75} = x$



o bien $\left(9^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{75}{100}} = x$

o bien $\left(9^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = x$

o bien $9^{\frac{1}{3}} = x$

donde $x = \sqrt[4]{9}$ ó $x = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$

Por lo tanto $\boxed{x = \sqrt{3}}$

## 12.1 Propiedades de los logaritmos

### *Teorema del producto*

El logaritmo del producto de dos o más factores en una determinada base es igual a la suma de los logaritmos de los factores en la misma base.

$$\boxed{log_a\ (x_1.x_2.x_3\ldots x_n) = log_a x_1 + log_a x_2 + log_a x_3 \ldots + log_a x_n}$$

### *Teorema del cociente*

El logaritmo del cociente de dos números en una determinada base es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.

$$\boxed{log_a\ \frac{x_1}{x_2} = log_a\ x_1 = log_a\ x_2}$$

*Teorema de la potencia*

El logaritmo de base $a$ de la potencia $x^p$ es igual al producto del exponente $p$ por el logaritmo de $x$ en la base $a$**.**

$$\boxed{\log_a x^p = p \log_a x}$$

*Teorema de la raíz*

El logaritmo de la raíz enésima de un número $x$, en una determinada base $a$, es igual al producto del exponente por el logaritmo de $x$ en la base $a$.

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x}$$

## 12.2 Cologaritmo de un número

Se llama cologaritmo de un número, en una determinada base, al logaritmo del recíproco de dicho número en la misma base.

$$\boxed{\operatorname{colog}_a x = \log_a \frac{1}{x}}$$

*Propiedad:* el cologaritmo de un número, en una determinada base, es igual al logaritmo de dicho número, con el signo cambiado (en la misma base).



Tesis:

$$\operatorname{colog}_a x = -\log_a x$$

En efecto, de la definición de cologaritmo se deduce lo siguiente:

$$\operatorname{colog}_a x = \log_a \frac{1}{x}$$

Pero, por el teorema del cociente, tenemos lo siguiente:

$$\operatorname{colog}_a x = \log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x$$

y como $\log_a 1 = 0,$ resulta que

$$\boxed{\operatorname{colog}_a x = -\log_a x}$$

Por ejemplo:

$$\operatorname{colog}_2 16 = -\log_2 16$$

*y como* $\log_2 16 = 4$ *porque* $2^4 = 16$*, vemos que*

$$\operatorname{colog}_a 16 = -\log_2 16 = -4$$

Ejercicios:

Determine el valor de las siguientes letras:

1) $\log_5 125 = y$ 2) $\log_4 x = 0{,}5$

3) $log_2\ 32 = y$

4) $log_3 81 = y$

5) $log_7 2.401 = y$

6) $log_4 x = 3$

7) $log_7 343 = y$

8) $log_{25} x = -0,5$

9) $log_{16} x = -0,25$

10) $log_{81} x = -0,25$

11) $log_a 64 = 2$

12) $log_a 27 = 3$

13) $log_a 625 = 4$

14) $log_a 2 = 2$

## 12.3 Logaritmos decimales o logaritmos ordinarios

Se llaman logaritmos *decimales* u *ordinarios* o *de Briggs* a los logaritmos de base 10.

Se llaman *ordinarios* porque son los que se utilizan comúnmente.

Otro sistema de logaritmos, muy utilizado en Matemática superior, es el sistema de logaritmos neperianos o hiperbólicos o incluso naturales, creado por John Napier, el matemático escocés introductor de los logaritmos. Él les atribuye como base el siguiente número:

$$e = 2,7182818284590..........$$



CAPÍTULO 2

# NOCIONES DE QUÍMICA